Bsp zu l'Hôpital:

Wir sollen $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$ bestimmen.

Versucht man es durch Einsetzen, so erhält man „$\frac{0}{0}$".

Also ist es ein Fall für l'Hôpital: Zähler und Nenner separat ableiten!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\tan(x))'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan(x)^2}{1}$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{=} 1 + \tan(0)^2 = 1$$

Zur Erinnerung: Liegt eine stetige und an der fraglichen Stelle definierte Funktion vor, wie z. B. $1+\tan(x)^2$, so kann der Grenzwert durch Einsetzen bestimmt werden.

Bsp zu l'Hôpital (kurz "l'H")

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)'}{(x-1)'}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{1} \overset{\text{Einsetzen}}{=} 3$$

Natürlich hätte man auch wie folgt rechnen können:

$$(x^3-1) = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2 \\ \hline \quad x^2 \\ \quad x^2 - x \\ \hline \qquad x - 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{=} 3$$

<u>Bsp</u> zu l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^2}{x^2} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{}{\underset{l'H}{=}}} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x)^2)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2} \sin(x) \cos(x)}{\cancel{2} x}$$

$$\overset{l'H}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sin(x) \cos(x)\right)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x)(-\sin(x))}{1}$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{=} 1$$

Das geht aber geschickter:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2$$

$$\boxed{\overset{t \mapsto t^2}{\underset{\text{stetig}}{=}}} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = \ldots$$

08.05.2020 – 16

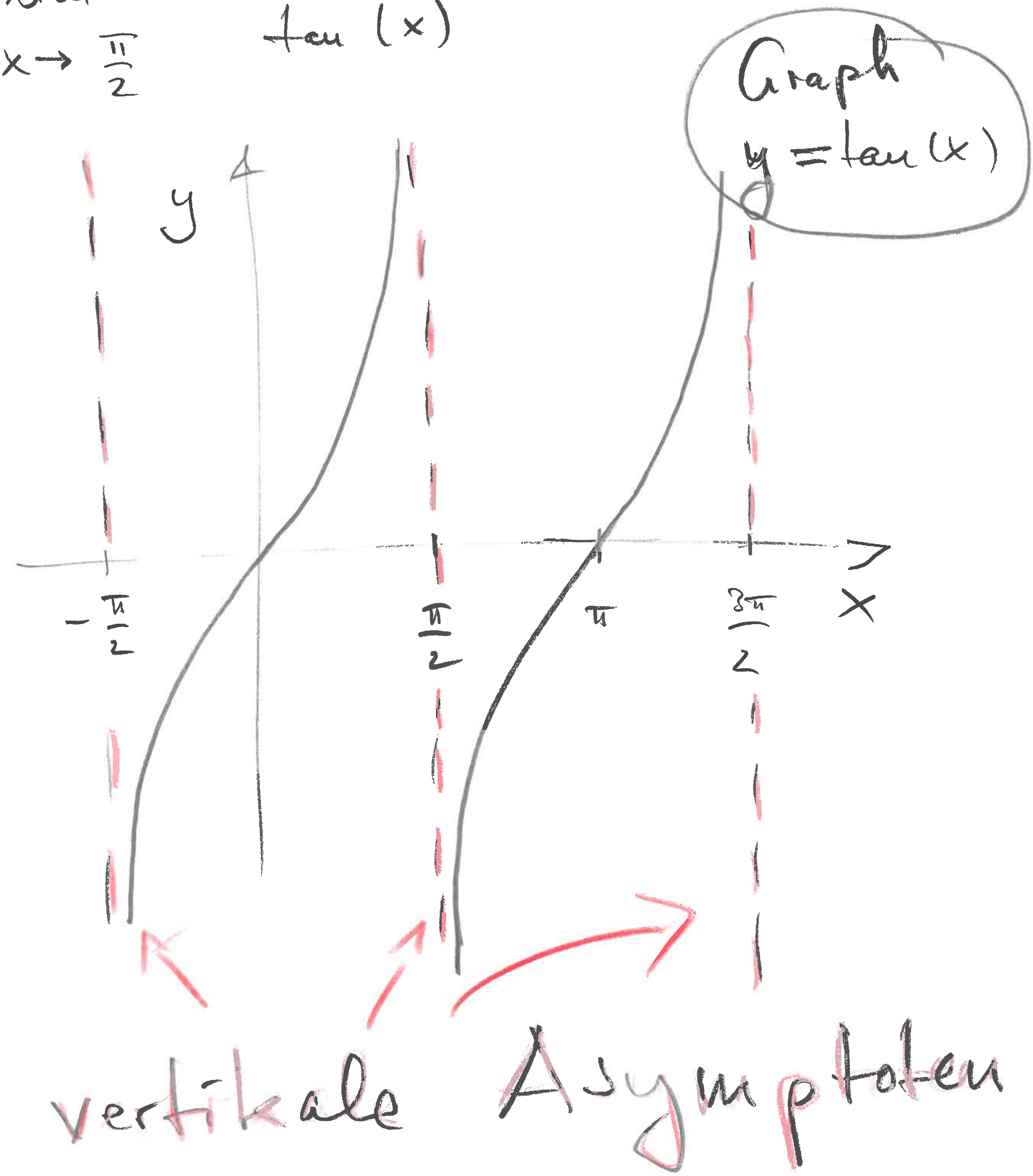
$$\ldots \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{l'H}}{=}} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} \right)$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{=} \quad 1$$

Allgemein: Oft helfen Vorvereinfachungen, den Rechenweg abzukürzen. L'Hôpital nicht "blind" anwenden, sondern geschickt ansetzen!

Bsp für l'Hôpital

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \ ?$$



Also brauchen wir es

etwas genauer:

Sei $f : \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}$$

Wir suchen $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$.

Es wird nun:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}$$

$$\underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 + \tan(3x)^2\right) \cdot 3}{1 + \tan(x)^2}$$

08.05.2020
-19

$$\overset{\boxed{\overset{l'H}{=}\ \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}}{} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 3 \cdot \frac{2 \cdot \tan(3x)\left(1+\tan(3x)^2\right)\cdot 3}{2 \cdot \tan(x) \cdot \left(1+\tan(x)^2\right)}$$

$= \ldots$??

Das wird immer schlimmer!

Ein "blindes" Anwenden von l'Hôpital hat also nicht zur gewünschten Vereinfachung geführt.

Also <u>Neuansatz</u> mit vorhergehender Umformung:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \ldots$$

08.05.2020 - 20

$$\ldots = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{=} \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}$$

$$= - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}$$

$$\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{l'H}{=}} - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(x))'}{(\cos(3x))'}$$

$$= - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x)}{-\sin(3x) \cdot 3}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots \overset{\text{Einsetzen}}{=} -\frac{\cancel{\sin}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{\sin}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot 3}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

Bsp für l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)^2}$$

$$\overset{l'H}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)}$$

$$\overset{\text{Kürzen!}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-1}{2\cos(x)}$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{=} -\frac{1}{2}$$

Bsp für l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$$

$$\overset{l'H}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan(x)^2 - 1}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^2$$

$$\boxed{\overset{t \mapsto t^2}{\underset{\text{stetig}}{=}}} \frac{1}{3} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} \right)^2$$

$$\overset{l'H}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \frac{1}{3} \left(\lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan(x)^2}{1} \right)^2 \overset{\text{Einsetzen}}{=} \frac{1}{3}$$