__Bsp__ zur Matrixexponentialfunktion

Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Wir wollen $\exp(Ax)$ berechnen für $x \in \mathbb{R}$.

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 5-X & -2 \\ 6 & -2-X \end{pmatrix}$$

$$= X^2 + 2X - 5X - 10 + 12$$

$$= X^2 - 3X + 2$$

$$= (X-1)(X-2)$$

Eigenwerte:

$\lambda_1 = 1$, $aV_A(1) = 1$

$\lambda_2 = 2$, $aV_A(2) = 1$

Also ist $A$ diagonalisierbar.

zu $\lambda_1 = 1$:

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Basis $\left( \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$ von $E_A(1)$

zu $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Basis $\left( \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$ von $E_A(2)$

Setze $S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

Ist also

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$$

(oder "J")

Es ist $S^{-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Es ist $\exp(Dx)$

$$= \exp\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(x) & 0 \\ 0 & \exp(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Es wird

$$\exp(Ax) = S \exp(Dx) S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6e^{x} & 4e^{x} \\ 6e^{2x} & -3e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3e^{x} + 4e^{2x} & 2e^{x} - 2e^{2x} \\ -6e^{x} + 6e^{2x} & 4e^{x} - 3e^{2x} \end{pmatrix} .$$

<u>Probe:</u> $\det(\exp(Ax))$

$$= (-3e^{x} + 4e^{2x})(4e^{x} - 3e^{2x})$$
$$- (-6e^{x} + 6e^{2x})(2e^{x} - 2e^{2x}) = \ldots$$

$$\ldots = \underline{-12e^{2x}} + 9e^{3x} + 16e^{3x} \underline{- 12e^{4x}}$$

$$\underline{+12e^{2x}} - 12e^{3x} - 12e^{3x} \underline{+ 12e^{4x}}$$

$$= e^{3x}$$

$$\exp(\mathrm{tr}(Ax))$$

$$= \exp\left(\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot x\right)\right)$$

$$= \exp(3x) = e^{3x}$$

Das ist dasselbe, wie es auch sein soll.