08.07.20-16

Bsp zu Matrixexponentialfunktion

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zu berechnen sei $\exp(Ax)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ -1 & 1 & -X \end{pmatrix}$$

$$= (-X) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= (-X) \det \left(X^2 - 1 + 1 \right)$$

$$= -X^3$$

Wir haben also den Eigenwert

$\lambda_1 = 0$ mit algebraischer

Vielfachheit $aV_A(0) = 3$.

Zu $\lambda_1 = 0$:

$$A_{(1)} = A - 0E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Basis von

$$\mathrm{Kern}(A_{(1)}) : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ wir ergänzen mit $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

zur Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

von $\operatorname{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Da $aV_A(0) = 3$ Basisvektoren

vorliegen, ist dies auch eine

Basis des Hauptraums

$$H_A(0) = \operatorname{Kern}(A_{(1)}^2).$$

Es ist $A_{(1)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Mit diesem ersetzen wir den

Basisvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und erhalten

die Basis $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \ldots$

von $\quad \mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Hauptvektorketten:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{0} \end{pmatrix} =: J$$

$J_2(0)$

$J_1(0)$

Es wird $\quad \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

und $\quad \exp\left((0) \cdot x \right) = (1)$.

08.07.20-20

Also wird

$$\exp(Jx) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\exp(Ax) = S \cdot \exp(Jx) \cdot S^{-1}$$

Wir brauchen noch S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots$$

$$\ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}}$$

Wir setzen fort:

$$\exp(Ax) = S \cdot \exp(Jx) \cdot S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -x-1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x+1 & x & 0 \\ -x & x+1 & 0 \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}$$

08.07.2022

Probe:
$$\det(\exp(Ax))$$

$$= \det\begin{pmatrix} -x+1 & x & 0 \\ -x & x+1 & 0 \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -x+1 & x \\ -x & x+1 \end{pmatrix}$$

$$= 1-x^2+x^2 = 1$$

$$\exp(\operatorname{tr}(Ax))$$

$$= \exp\left(\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x\right)\right)$$

$$= \exp(0) = 1$$

Paßt.