Alternative Lösung zum Bsp. von 08.07.20 – 16.

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Zu berechnen sei $\exp(Ax)$, für $x \in \mathbb{R}$.

Direkt nach Definition wird:

$$\exp(Ax) = \frac{1}{0!} A^0 x^0 + \frac{1}{1!} A^1 x^1 + \frac{1}{2!} A^2 x^2 + \ldots$$

Aber $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Also auch $A^k = 0$ für $k \geq 2$.

Somit:

$$\exp(Ax) = \frac{1}{0!}\underbrace{A^0}_{E_3}x^0 + \frac{1}{1!}A^1x^1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x & x & 0 \\ -x & 1+x & 0 \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}$$

Vgl. 08.07.20-21.