<u>Bsp</u> für Partialbruchzerlegung

Auf 29.05.20 – 16 – 19 wurde berechnet:

$$\frac{x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Damit können wir das Integral

berechnen:

$$\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^3}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\, dx$$

$$= \left[ \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$$

Bsp für Partialbruchzerlegung

Auf 29.05.20- 19-22 wurde berechnet:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{-i}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}}{x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}} + \frac{\frac{i}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}}{x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}}$$

Damit können wir das Integral berechnen:

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{-i}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}}{x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}} + \frac{\frac{i}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}}{x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln|x-1|\right]$$

$$+ \left(-\frac{1}{6}\right)\int \frac{1}{x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)} + \frac{1}{x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)}\,dx$$

$$+ \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\int \frac{i}{x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)} - \frac{i}{x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)}\,dx$$

$= \ldots$

$$\ldots = \left[\frac{1}{3}\ln|x-1|\right] + \left(-\frac{1}{6}\right)\left[\ln\left(\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2\right)\right] + \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left[-2\arctan\left(\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)\right]$$

Formeln aus dritter Bemerkung von § 4.7.4.4 :

$$\int \frac{1}{x-(a+bi)} + \frac{1}{x-(a-bi)}\,dx = \left[\ln\left((x-a)^2+b^2\right)\right]$$

$$\int \frac{i}{x-(a+bi)} - \frac{i}{x-(a-bi)}\,dx = \left[-2\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]$$

$\arctan(-t) = -\arctan(t)$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$