Bsp für Partialbruchzerlegung

Wir wollen $\int \frac{x^5+4x^3+3x-4}{x^4+2x^2+1}\,dx$

berechnen.

Es ist der Grad des Zählers

nicht kleiner als der Grad des

Nenners.

Also kommt zuerst eine Polynomdivision.

$$\begin{array}{l} (x^5+4x^3+3x-4) = (x^4+2x^2+1)\cdot x \\ \quad + 2x^3+2x-4. \\ \underline{x^5+2x^3+x} \\ \quad 2x^3+2x-4 \end{array}$$

Also ist

$$\int \frac{x^5+4x^3+3x-4}{x^4+2x^2+1}\,dx = \int x + \frac{2x^3+2x-4}{x^4+2x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right] + \int \frac{2x^3+2x-4}{x^4+2x^2+1}\,dx$$

Es bleibt, $\int \frac{2x^3+2x-4}{x^4+2x^2+1}\,dx$

zu berechnen.

Wir zerlegen den Nenner in Faktoren von Grad 1:

$$x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$$
$$= ((x+i)(x-i))^2$$
$$= (x+i)^2(x-i)^2$$

Wir setzen die Partialbruch-zerlegung an:

$$\frac{2x^3+2x-4}{(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{(x+i)^2} + \frac{C}{x-i} + \frac{D}{(x-i)^2}$$

Gesucht: A, B, C, D

Multiplikation mit $(x+i)^2(x-i)^2$:

$$2x^3+2x-4 = A(x+i)(x-i)^2$$
$$+ B(x-i)^2$$
$$+ C(x+i)^2(x-i)$$
$$+ D(x+i)^2$$

$$= A(x^3-ix^2+x-i)$$
$$+ B(x^2-2ix-1)$$
$$+ C(x^3+ix^2+x+i)$$
$$+ D(x^2+2ix-1)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert folgendes inhomogene lineare Gleichungssystem, das wir sogleich umformen :

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & A & B & C & D & \\
x^3: & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
x^2: & -i & 1 & i & i & 0 \\
x^1: & 1 & -2i & 1 & 2i & 2 \\
x^0: & -i & -1 & i & -1 & -4
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 2i & 1 & 2i \\
0 & -2i & 0 & 2i & 0 \\
0 & -1 & 2i & -1 & -4+2i
\end{array}\right)
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 2i & 1 & 2i \\
0 & 0 & -4 & 4i & -4 \\
0 & 0 & 4i & 0 & -4+4i
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1-i \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1+i \\
0 & 0 & 0 & 4i & 4i
\end{array}\right)
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1-i \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1+i \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\Rightarrow A = 1-i, \quad B = 1, \quad C = 1+i, \quad D = 1.$$

Somit wird

$$\int \frac{2x^3+2x-4}{(x+i)^2(x-i)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1-i}{x+i} + \frac{1}{(x+i)^2} + \frac{1+i}{x-i} + \frac{1}{(x-i)^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right]$$

$$+ \int \frac{1}{x-i} + \frac{1}{x-(-i)}\,dx$$

$$+ \int \frac{i}{x-i} - \frac{i}{x-(-i)}\,dx$$

$$= \ldots$$

Formeln aus dritter Bemerkung von § 4.7.1.4:

$$\int \frac{1}{x-(a+bi)} + \frac{1}{x-(a-bi)}\,dx = \left[\ln\left((x-a)^2+b^2\right)\right]$$

$$\int \frac{i}{x-(a+bi)} - \frac{i}{x-(a-bi)}\,dx = \left[-2\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]$$

$$\ldots = \left[-\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]$$

$$+ \left[\ln\left((x-0)^2 + 1^2 \right) \right]$$

$$+ \left[(-2) \arctan\left(\frac{x-0}{1} \right) \right]$$

$$= \left[-\frac{2x}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - 2\arctan(x) \right]$$

Zusammengefaßt ergibt sich also:

$$\int \frac{x^5 + 4x^3 + 3x - 4}{x^4 + 2x^2 + 1} \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right] + \int \frac{2x^3 + 2x - 4}{(x+i)^2 (x-i)^2} \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{2x}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - 2\arctan(x) \right]$$

Wem der Lösungsweg zu lang erschien, der bedenke:
der Lösungsweg kann nicht einfacher sein als das Ergebnis.