Bsp für keine Partialbruch-zerlegung

Kann man eine Partialbruchzerlegung vermeiden, sollte man dies tun:

Zu berechnen sei $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$.

Wir substituieren: $u = x^2+1$

Es wird $\frac{du}{dx} = 2x$

Also: $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}\, dx = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]$$

<u>Bsp</u> für <u>keine</u> Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx \overset{u=x+1}{\underset{\frac{du}{dx}=1}{=}} \int \frac{u-1}{u^3}\,du$$

$$= \int \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\,du = \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]$$

Bsp für uneigentliches Integral

zu berechnen ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Da die Integrationsgrenze 0 nicht im Definitionsbereich des Integranden liegt, ist dies ein uneigentliches Integral, mit uneigentlicher Integrationsgrenze 0.

Es wird

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{u \to 0} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

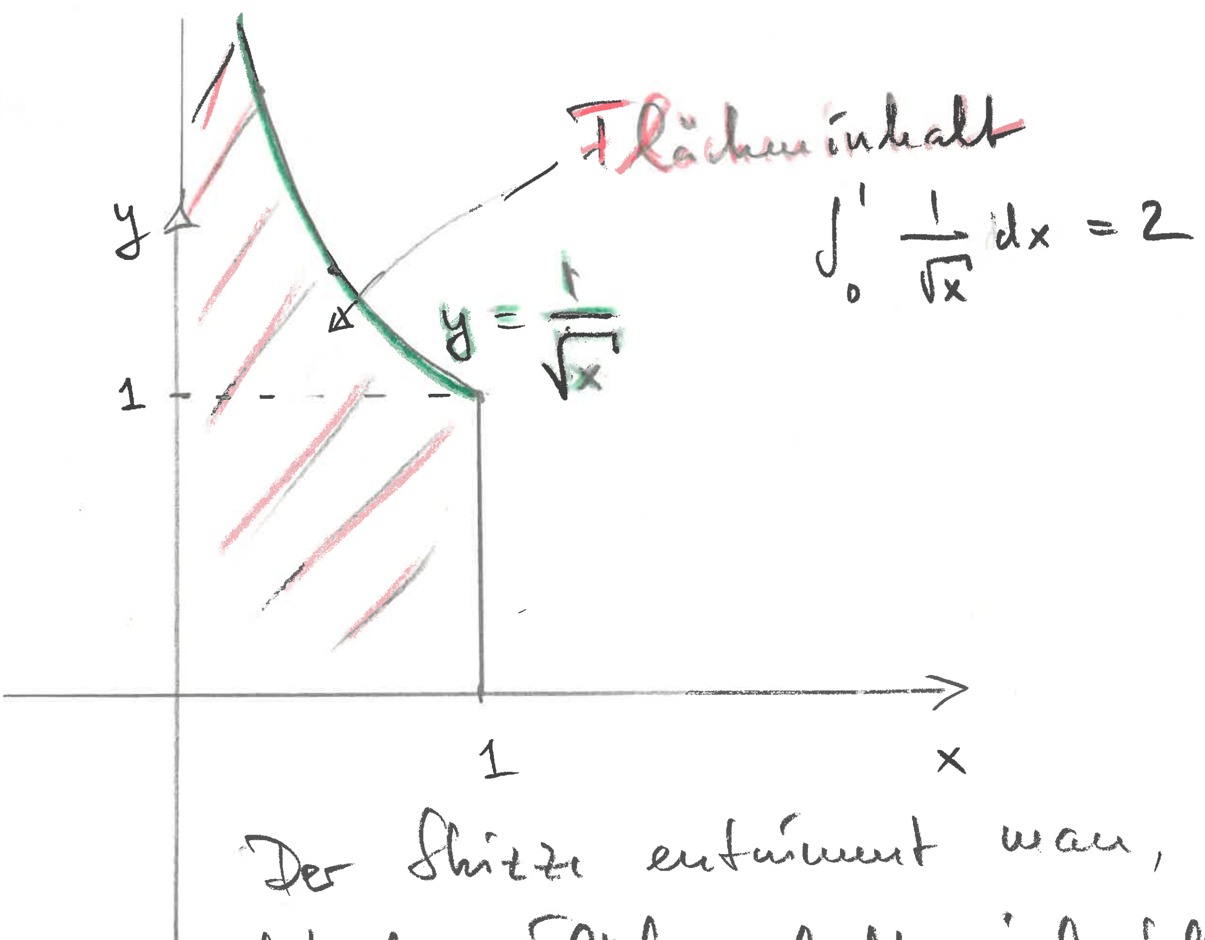
$$= \lim_{u \to 0} \int_u^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right]_u^1$$

$$= \lim_{u \to 0} 2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

Geometrisch:



Der Skizze entnimmt man, daß der Flächeninhalt jedenfalls ≥ 1 ist (Quadrat!).

Bsp zu uneigentlichem Integral

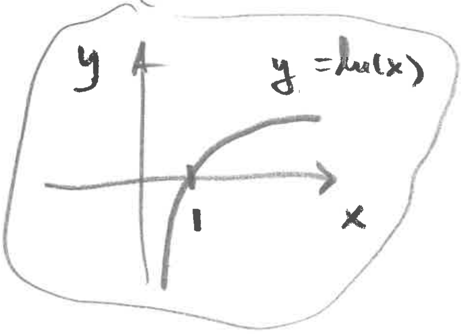
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u \to 0} \int_u^1 \frac{1}{x}\,dx$$

0 ist uneigentliche Integrationsgrenze

$$= \lim_{u \to 0} \big[\ln(x)\big]_u^1$$

$$= \lim_{u \to 0} \ln(1) - \ln(u)$$

$$= 0 - (-\infty) = +\infty$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{v\to+\infty} \int_1^v \frac{1}{x}\,dx$$

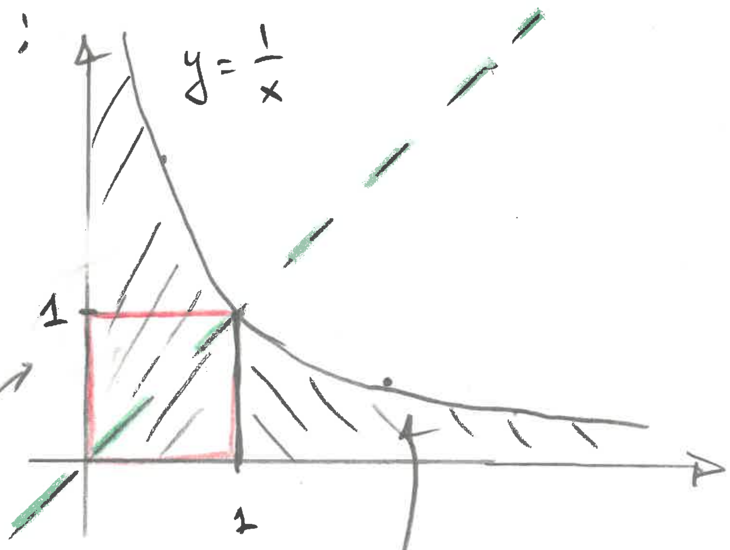
$$= \lim_{v\to+\infty} \left[\ln(x)\right]_1^v$$

$$= \lim_{v\to+\infty} \ln(v) - \ln(1)$$

$$= +\infty - 0$$

$$= +\infty$$

Geometrisch:



Flächeninhalt

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

Flächeninhalt

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

Das ist plausibel, da die beiden Flächen bis auf ein Quadrat spiegelsymmetrisch sind.

10.06.2016

Bsp zu Majorantenkriterium

Wir sollen entscheiden, ob das uneigentliche Integral

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^2+\cos(x)^2}\,dx$$

konvergiert.

Eine Möglichkeit, Konvergenz nachzuweisen, ist, das Integral auszurechnen und eine endliche Zahl als Wert des Integrals zu bekommen. Dieser Weg ist hier nicht gangbar, ...

10.06.2017

... da wir nicht in der Lage sind, eine Aufleitung von $\dfrac{1}{x^2+\cos(x)^2}$ zu finden.

Also weichen wir auf das Majorantenkriterium aus:

Es ist $x^2+\cos(x)^2 \geqslant x^2$,

also ist

$$\left|\frac{1}{x^2+\cos(x)^2}\right| = \frac{1}{x^2+\cos(x)^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

für $x \in [3, +\infty[$.

Ferner ist

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \int_3^{v} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_3^{v}$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \left(-\frac{1}{v}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

Insbesondere ist $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent.

(Hier hat die eingangs erwähnte Möglichkeit der Konvergenzentscheidung durch tatsächliche Berechnung funktioniert.)

Also ist $\frac{1}{x^2}$ eine

konvergente Majorante

für $\dfrac{1}{x^2+\cos(x)^2}$ auf $[3, +\infty[$.

Dank Majorantenkriterium konvergiert also auch

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+\cos(x)^2}\,dx .$$

Wir können es aber nicht berechnen,

nur abschätzen:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+\cos(x)^2}\,dx \leq \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{3}$$

Tatsächlich ist

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+\cos(x)^2}\,dx \underset{\text{rechner}}{\overset{\text{Taschen-}}{\approx}} 0{,}3258$$

10.06.2020

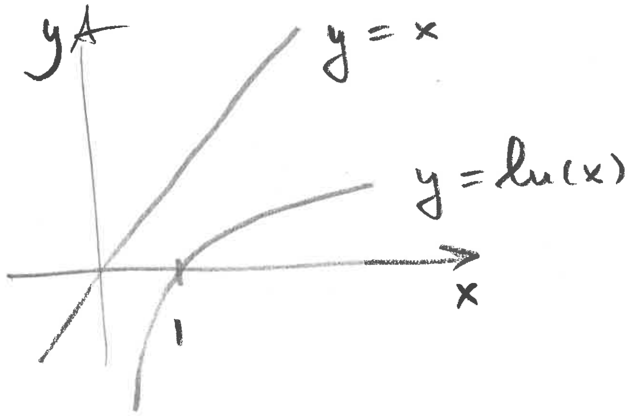
<u>Bsp</u> für Majorantenkriterium, negiert angewandt.

Konvergiert $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$?

Wir verwenden dazu die Ungleichung

$$x \geq \ln(x)$$

für $x \in [2, +\infty[$, die zumindest graphisch einleuchtet:



[Man kann das auch nachweisen: Taylor sagt, für ein $\vartheta \in [0,1]$ ist

$$\begin{aligned}\ln(x) =: f(x) &= T_1(f, x, 1) + R_1(f, x, 1, \vartheta) \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1+\vartheta(x-1))}{2}(x-1)^2 \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\cdot(x-1) - \frac{1}{2(1+\vartheta(x-1))^2}(x-1)^2 \ldots\end{aligned}$$

$$\ldots = x-1 - \underbrace{\frac{1}{2(1+\vartheta(x-1))^2}(x-1)^2}_{\geq 0}$$

$$\leq x-1$$

$$< x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_{>0} \;]$$

Es ist für $x \in [2, +\infty[$ also

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

Wäre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$ konvergent,

dann wäre $\frac{1}{\ln(x)}$ auf $[2, +\infty[$ eine konvergente Majorante von $\frac{1}{x}$,

und dank Majorantenkriterium also

auch $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ konvergent.

10.06.20 -22

Aber $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{v \to +\infty} \int_2^{v} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \left[\ln(x) \right]_2^{v}$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \left(\ln(v) - \ln(2) \right)$$

$$= +\infty - \ln(2) = +\infty \,.$$

Es ist also $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ bestimmt divergent und <u>nicht</u> konvergent.

Wir haben einen <u>Widerspruch</u>.

Also ist $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$ <u>nicht</u> konvergent.