<u>Bsp</u> zu $y' = Ay$

mit A konstant.

Sei, wie im Bsp. von 08.07.20-1,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen die Lösung von $y' = Ay$ zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es war

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} x\right) \overset{08.07.20-4}{=} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3e^x + 4e^{2x} \\ -6e^x + 6e^{2x} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2e^x - 2e^{2x} \\ 4e^x - 3e^{2x} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Also haben wir das Fundamentalsystem

$$\left(\boxed{\begin{pmatrix} -3e^x + 4e^{2x} \\ -6e^x + 6e^{2x} \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} 2e^x - 2e^{2x} \\ 4e^x - 3e^{2x} \end{pmatrix}} \right)$$

für $y' = Ay$.

Jede Lösung von $y' = Ay$

ist von der Form

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} -3e^x + 4e^{2x} \\ -6e^x + 6e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^x - 2e^{2x} \\ 4e^x - 3e^{2x} \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingung $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

verlangt also $c_1 = 1$ und $c_2 = 1$.

Somit erhalten wir

$$y(x) = 1 \cdot \begin{pmatrix} -3e^x + 4e^{2x} \\ -6e^x + 6e^{2x} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^x - 2e^{2x} \\ 4e^x - 3e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} -e^x + 2e^{2x} \\ -2e^x + 3e^{2x} \end{pmatrix}$$

<u>Bsp</u> zu $y' = Ay + g(x)$

mit A konstant.

Sei, wie im Bsp von 08.07.20 – 6,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen alle Lösungen von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g(x)}$$

Von 08.07.20 − 13/14 wissen wir:

$$\exp(Ax) = \begin{pmatrix} \cos(x)+\sin(x) \\ -e^{2x}+\cos(x) \\ -e^{2x}+\cos(x)+\sin(x) \end{pmatrix}$$

$$= \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} \cos(x)+\sin(x) \\ -e^{2x}+\cos(x) \\ -e^{2x}+\cos(x)+\sin(x) \end{matrix}}_{y_{[1]}(x)} \; \Bigg| \; \underbrace{\begin{matrix} 2\sin(x) \\ \sin(x)+\cos(x) \\ 2\sin(x) \end{matrix}}_{y_{[2]}(x)} \; \Bigg| \; \underbrace{\begin{matrix} -2\sin(x) \\ e^{2x}-\sin(x)-\cos(x) \\ e^{2x}-2\sin(x) \end{matrix}}_{y_{[3]}(x)} \Bigg)$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

$$\left(y_{[1]}(x),\ y_{[2]}(x),\ y_{[3]}(x) \right)$$

für $y' = Ay$.

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung $y_{[0]}(x)$ für

$$y' = Ay + g(x).$$

Ansatz: Variation der Konstanten. Also:

Die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ war

$$y = c_1 y_{[1]}(x) + c_2 y_{[2]}(x) + c_3 y_{[3]}(x)$$

$$= \exp(Ax) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=: c}$$

Demgemäß setzen wir an:

$$y_{[0]}(x) = \exp(Ax) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix}}_{=: c(x) \text{ gesucht}}$$

Gelten soll:

$$y_{[0]}'(x) = \underbrace{A \exp(Ax) \cdot c(x)} + \exp(Ax) \cdot c'(x)$$

$$\stackrel{!}{=}$$

$$A y_{[0]}(x) + g(x) = \underbrace{A \exp(Ax) \cdot c(x)} + g(x),$$

Gelten soll also

$$\exp(Ax)\, c'(x) \overset{!}{=} g(x),$$

d.h. $c'(x) \overset{!}{=} \exp(Ax)^{-1} g(x)$.

Brauchen: $\exp(Ax)^{-1}$.

Gauß sieht hoffnungslos aus,

vgl. 10.07.20 – 4. Also stattdessen:

$$\exp(Ax)^{-1} = \exp(-Ax)$$

Auf 08.07.20 – 11, 12:

Mit $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

und $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & -i & i \\ \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & i & -i \end{pmatrix}$

wurde

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} =: D$$

Also $\quad S^{-1}(-A)S = -D$,

und somit

$$\exp(-Ax)$$

$$= \exp\left(S(-Dx) S^{-1} \right)$$

$$= S \exp(-Dx) S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ix} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ix} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & -i & i \\ \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & i & -i \end{pmatrix}$$

$= \ldots$

$$\ldots = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ix} & e^{ix} \\ e^{-2x} & \left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)e^{-ix} & \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)e^{ix} \\ e^{-2x} & e^{-ix} & e^{ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & -i & i \\ \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & i & -i \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) + \frac{i}{2}(e^{ix}-e^{-ix}) & i(e^{ix}-e^{-ix}) & -i(e^{ix}-e^{-ix}) \\ \hline -e^{-2x} + \frac{1}{2}(e^{-ix}+e^{ix}) & +\frac{i}{2}(e^{ix}-e^{-ix}) + \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) & e^{-2x} - \frac{i}{2}(e^{ix}-e^{-ix}) - \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \\ \hline -e^{-2x} + \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) + \frac{i}{2}(e^{ix}-e^{-ix}) & i(e^{ix}-e^{-ix}) & e^{-2x} - i(e^{ix}-e^{-ix}) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \cos(x) - \sin(x) & -2\sin(x) & 2\sin(x) \\ \hline -e^{-2x} + \cos(x) & -\sin(x) + \cos(x) & e^{-2x} + \sin(x) - \cos(x) \\ \hline -e^{-2x} + \cos(x) - \sin(x) & -2\sin(x) & e^{-2x} + 2\sin(x) \end{array}\right)$$

Also:

$$c'(x) \overset{!}{=} \exp(Ax)^{-1} \cdot g(x)$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} \cos(x)-\sin(x) & * & * \\ \hline -e^{-2x}+\cos(x) & * & * \\ \hline -e^{-2x}+\cos(x)-\sin(x) & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(x) - \sin(x)^2 \\ -e^{-2x}\sin(x) + \cos(x)\sin(x) \\ -e^{-2x}\sin(x) + \cos(x)\sin(x) - \sin(x)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(2x) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) \\ -e^{-2x}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \\ -e^{-2x}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) \end{pmatrix}$$

NR: $\int e^{-2x}\sin(x)\,dx$

$$= \left[e^{-2x}(-\cos(x))\right] - \int (-2)e^{-2x}(-\cos(x))\,dx$$

$$= \left[-e^{-2x}\cos(x)\right] - 2\int e^{-2x}\cos(x)\,dx$$

$= \ldots$

$$\ldots = \left[-e^{-2x} \cos(x) \right]$$

$$-2 \left(\left[e^{-2x} \sin(x) \right] - \int (-2)\, e^{-2x} \sin(x)\, dx \right)$$

$$= \left[-e^{-2x} \cos(x) - 2 e^{-2x} \sin(x) \right]$$

$$- 4 \int e^{-2x} \sin(x)\, dx$$

Umstellen:

$$5 \int e^{-2x} \sin(x)\, dx$$

$$= \left[-e^{-2x} \cos(x) - 2 e^{-2x} \sin(x) \right]$$

Also

$$\int e^{-2x} \sin(x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{5} e^{-2x} \cos(x) - \frac{2}{5} e^{-2x} \sin(x) \right]$$

(Wenn das zu trickreich ist, darf auch

gerne $\int e^{-2x} \sin(x)\, dx$

$$= \int e^{-2x} \frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2i} \int e^{(-2+i)x} - e^{(-2-i)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{-2+i} e^{(-2+i)x} - \frac{1}{-2-i} e^{(-2-i)x} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2i} e^{-2x} \left(\frac{-2-i}{5} e^{ix} - \frac{-2+i}{5} e^{-ix} \right) \right]$$

$$= \left[e^{-2x} \left(-\frac{2}{5} \sin(x) - \frac{1}{5} \cos(x) \right) \right]$$

rechnen.)

Wir können als Stammfunktionen nehmen:

$$c(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) \\ e^{-2x}\left(\frac{2}{5}\sin(x) + \frac{1}{5}\cos(x)\right) - \frac{1}{4}\cos(2x) \\ e^{-2x}\left(\frac{2}{5}\sin(x) + \frac{1}{5}\cos(x)\right) - \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir als Partikulärlösung

$$y_{[0]}(x) = \exp(Ax) \cdot c(x)$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -5(2x+1)(\cos(x) - \sin(x)) \\ -5\cos(x)\cos(2x) - 5\sin(x)\sin(2x) + 10x\sin(x) + 4\cos(x) + 8\sin(x) \\ -5(\cos(x) - \sin(x))\cos(2x) + 5(\cos(x) - \sin(x))\sin(2x) + (4 - 10x)\cos(x) + (10x + 8)\sin(x) \end{pmatrix}$$

Mit $y_{[1]}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) + \sin(x) \\ -e^{2x} + \cos(x) \\ -e^{2x} + \cos(x) + \sin(x) \end{pmatrix}$,

$$y_{[2]}(x) = \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix}, \quad y_{[3]}(x) = \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ e^{2x} - \sin(x) - \cos(x) \\ e^{2x} - 2\sin(x) \end{pmatrix}$$

ist also jede Lösung

von $y' = Ay + g(x)$

von der Form

$$y(x) = y_{[0]}(x) + c_1\, y_{[1]}(x) + c_2\, y_{[2]}(x) + c_3\, y_{[3]}(x),$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(Man hätte auch noch einen

Basiswechsel durchführen können:

mit $(y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]})$ ist

auch

$$\left(y_{[3]} + y_{[2]} ,\quad y_{[2]} ,\quad y_{[1]} + y_{[2]} + y_{[3]} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(x) + \sin(x) \\ \cos(x) \\ \cos(x) + \sin(x) \end{pmatrix} \right)$$

ein Erzeugendensystem des dreidimensionalen Lösungsraums zu $y' = Ay$ und also auch eine Basis, d.h. ein Fundamentalsystem – von etwas einfacherer Gestalt.)