<u>Bsp</u> zu $y' = Ay + g(x)$

Sei, wie auf 08.07.20-16,

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $g(x) := \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$.

Wir suchen alle Lösungen von

$$y' = Ay + g(x).$$

Auf 08.07.20-21 (oder 08.07.20-24)

wurde berechnet:

$$\exp(Ax) = \begin{pmatrix} -x+1 & x & 0 \\ -x & x+1 & 0 \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{y_{[1]}(x)} \quad \underbrace{}_{y_{[2]}(x)} \quad \underbrace{}_{y_{[3]}(x)}$$

Also hat

$$y' = Ay$$

die allgemeine Lösung

$$y(x) = \exp(Ax) \cdot c$$

Für eine partikuläre Lösung $y_{[0]}(x)$

zu $y' = Ay + g(x)$

machen wir also den Ansatz

der Variation der Konstanten

$$y_{[0]}(x) = \exp(Ax)\, c(x) .$$

Es soll dann werden

$$y'_{[0]}(x) = \underbrace{A \exp(Ax)\, c(x)} + \exp(Ax)\, c'(x)$$

$$\overset{!}{=}$$

$$A\, y_{[0]}(x) + g(x) = \underbrace{A \exp(Ax)\, c(x)} + g(x)$$

Also

$$\exp(Ax)\, c'(x) \overset{!}{=} g(x) ,$$

d.h. $c'(x) \overset{!}{=} \exp(Ax)^{-1} g(x) .$

10.07.2019

Nun:

$$\exp(Ax)^{-1} = \exp(-Ax)$$

$$= \frac{1}{0!}(-Ax)^0 + \frac{1}{1!}(-Ax)^1$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2!}(-Ax)^2 + \frac{1}{3!}(-Ax)^3 + \cdots}_{= 0,\ \text{da } A^2 = 0}$$

$$= E_3 - Ax$$

$$= \begin{pmatrix} 1+x & -x & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ x & -x & 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$c'(x) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1+x & -x & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ x & -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

Wir können $c(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$

nehmen. Das liefert

$$y_{[0]}(x) = \exp(Ax) \cdot c(x)$$

$$= \begin{pmatrix} -x+1 & x & 0 \\ -x & x+1 & 0 \\ -x & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

Also ist jede Lösung

von $y' = Ay + g(x)$

von der Form

$$y(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x+1 & x & 0 \\ -x & x+1 & 0 \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

<u>Probe:</u>

$$y'(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

10.07.2022

$$A y(x) + g(x)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x+1 & x & 0 \\ -x & x+1 & 0 \\ -x & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Das ist dasselbe.