Bsp für Integralkriterium

Konvergiert $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}$?

Wenn ja, können wir den Grenzwert dieser Reihe abschätzen?

Sei $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x) := \frac{1}{x \ln(x)^2}$$

Für $x_1, x_2 \in [2, +\infty[$ mit $x_1 \leq x_2$ ist $0 < \ln(x_1) \leq \ln(x_2)$

und also $\frac{1}{x_1 \ln(x_1)^2} \geq \frac{1}{x_2 \ln(x_2)^2} > 0.$

Somit dürfen wir das Integralkriterium anwenden: ...

Wir haben die Äquivalenz von Aussagen:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} dx \quad \text{konvergiert}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2} \quad \text{konvergiert}$$

Ersteres können wir nachrechnen!

$$\int \frac{1}{x \ln(x)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{\ln(x)^2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \ln(x) \\ \Longrightarrow \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array}} \qquad \int \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2} du = \left[-\frac{1}{u} \right] = \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]$$

Also wird

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} \, dx$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \int_2^v \frac{1}{x \ln(x)^2} \, dx$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_2^v$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln(v)} \right) - \left(-\frac{1}{\ln(2)} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \qquad < +\infty$$

Wir haben durch Bestimmung des endlichen Grenzwerts $\frac{1}{\ln(2)}$ nachgewiesen, daß $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} \, dx$ konvergiert.

Also konvergiert auch

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}.$$

Wir haben ferner die Abschätzungen

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} dx \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2} \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} dx + \frac{1}{2 \ln(2)}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} dx \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{\ln(2)} \overset{\text{Taschenrechner}}{\approx} 1{,}4427$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} dx + \frac{1}{2 \ln(2)} \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{3}{2} \frac{1}{\ln(2)} \overset{\text{Taschenrechner}}{\approx} 2{,}1640$$

$$\left(\text{Tatsächlich: } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2} \underset{\text{Taschenrechner}}{\approx} 2{,}1097 \right)$$

Bsp für kein Integralkriterium.

Sei $f(x) = \sin(\pi x)^2$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Hier ist:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \;\not\Longrightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2) \geq 0$$

Zum Beispiel ist

$$0 \leq 4 \leq \frac{9}{2},$$

aber

$$f(4) = \sin(4\pi)^2 = 0$$

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = \sin\left(\frac{9}{2}\pi\right)^2 = 1,$$

also $f(4) \not\geq f\left(\frac{9}{2}\right)$.

Und auch die Aussage ist falsch:

$$\sin(t)^2 = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2it} - 2 + e^{-2it}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2t) - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$\Rightarrow \int \sin(\pi x)^2 \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi x) \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(2\pi x) \cdot \frac{1}{2\pi}\right]$$

$\Rightarrow$ ...

$$\ldots \int_0^{+\infty} \sin(\pi x)^2 \, dx$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \int_0^v \sin(\pi x)^2 \, dx$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{v \to +\infty} \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x) \right]_0^v$$

$$= \lim_{v \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{2} v}_{\to +\infty} - \frac{1}{4\pi} \underbrace{\sin(2\pi v)}_{\in [-1, +1]}$$

$$= +\infty$$

Somit ist hier

$$\int_0^{+\infty} \sin(\pi x)^2 \, dx$$

nicht konvergent, sondern bestimmt divergent

Auf der anderen Seite ist

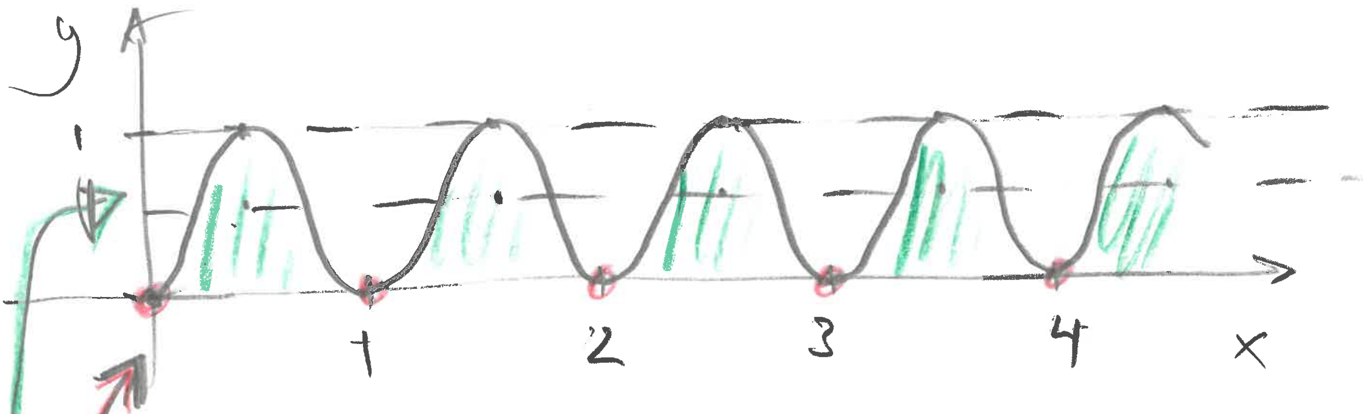
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(\pi k)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$$

konvergent.

Also: Hier war die Voraussetzung des Integralkriteriums nicht erfüllt. Und die Folgerung des Integralkriteriums (Konvergenz uneigentliches Integral $\Leftrightarrow$ Konvergenz Reihe) trifft auch nicht zu.

Geometrisch:



Reihe summiert diese Werte auf, das gibt 0

uneigentliches Integral berechnet diesen Flächeninhalt, das gibt $+\infty$