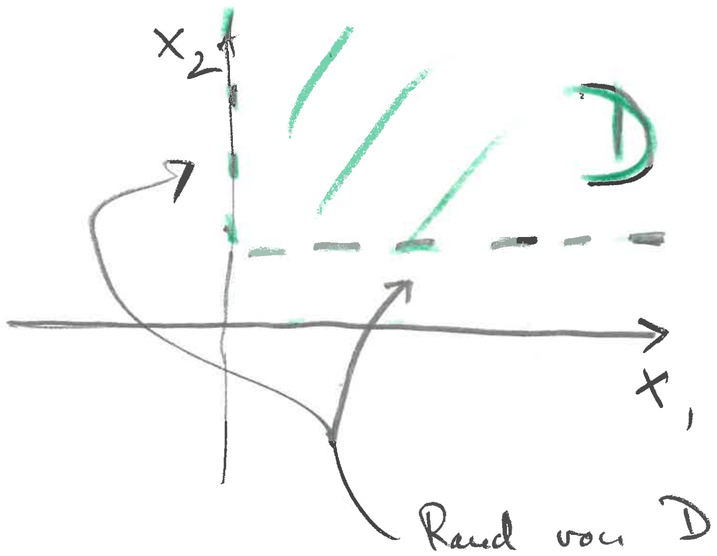
Bsp zu partiellen Ableitungen, Gradient und Hessematrix

Sei $D = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>1} \subseteq \mathbb{R}^2$

Es ist $D \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$, da der Rand von D nicht zu D gehört



Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} :$$

$$x = (x_1, x_2) \longmapsto f(x) = f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1 \ln(x_2)}$$

Beim partiellen Ableiten nach x_1 wird x_1 als variabel und x_2 als konstant angesehen:

$$f_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{x_1 \ln(x_2)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{x_1} \sqrt{\ln(x_2)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \sqrt{\ln(x_2)}$$

Beim partiellen Ableiten nach x_2 wird x_2 als variabel und x_1 als konstant angesehen:

$$f_{x_2}(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{x_1 \ln(x_2)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{x_1} \sqrt{\ln(x_2)}$$

Ketten-

$$= \sqrt{x_1} \frac{1}{2\sqrt{\ln(x_2)}} \cdot \frac{1}{x_2}$$

regel

Der Gradient faßt diese beiden partiellen Ableitungen zu einem Vektor zusammen:

$$\nabla_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \sqrt{\ln(x_2)} \\ \sqrt{x_1} \frac{1}{2\sqrt{\ln(x_2)}} \frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_1}\sqrt{\ln(x_2)}} \begin{pmatrix} \ln(x_2) \\ \frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

optionale Umformung

Für die Hessematrix berechnen wir noch die zweiten partiellen Ableitungen:

- $f_{x_1 x_1}(x_1, x_2)$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} f_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln(x_2)}$$

$$= -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\ln(x_2)}$$

- $f_{x_2 x_2}(x_1, x_2)$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} f_{x_1}(x_1, x_2) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{x_1} \frac{1}{2 x_2 \sqrt{\ln(x_2)}}$$

$$\overset{\text{Quotienten-regel}}{=} \sqrt{x_1} \frac{-2\sqrt{\ln(x_2)} - 2 x_2 \frac{1}{2\sqrt{\ln(x_2)} \cdot x_2}}{4 x_2^2 \ln(x_2)}$$

$$= -\sqrt{x_1} \frac{2\ln(x_2) + 1}{4 x_2^2 (\ln(x_2))^{3/2}}$$

- $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} f_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \ln(x_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \ln(x_2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x_2}$$

$$= \frac{1}{4} x_1^{-\frac{1}{2}} \ln(x_2)^{-\frac{1}{2}} x_2^{-1}$$

- $f_{x_2 x_1}(x_1, x_2) \overset{\text{Schwarz}}{=} f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$

Dies liefert die folgende Hessematrix:

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) & f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \\ f_{x_2 x_1}(x_1, x_2) & f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} \ln(x_2)^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} x_1^{-\frac{1}{2}} \ln(x_2)^{-\frac{1}{2}} x_2^{-1} \\ \frac{1}{4} x_1^{-\frac{1}{2}} \ln(x_2)^{-\frac{1}{2}} x_2^{-1} & -\frac{1}{4} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-2} \ln(x_2)^{-\frac{3}{2}} (2\ln(x_2)+1) \end{pmatrix}$$

$= \ldots$

optional

12.06.2017

$$\ldots = \frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} \ln(x_2)^{-\frac{3}{2}} x_2^{-2} \cdot \begin{pmatrix} -\ln(x_2)^2 x_2^2 & x_1 \ln(x_2) x_2 \\ x_1 \ln(x_2) x_2 & -x_1^2 (2\ln(x_2)+1) \end{pmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Man kann, wenn man die Zeit und das Mißtrauen sich selbst gegenüber hat, zur Probe auch $f_{x_2 x_1}(x_1, x_2)$ direkt ausrechnen und mit $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$ vergleichen.

Bsp zu Gradient und Hessematrix

Sei $D = \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$.

Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) := e^{x+y+z} \cdot \frac{y}{x}$$

Wir erhalten:

$$f_x(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot y \cdot x^{-1}$$
$$+ e^{x+y+z} \cdot y \cdot (-x^{-2})$$
$$= e^{x+y+z} \cdot y \cdot (x^{-1} - x^{-2})$$

$$f_y(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot y \cdot x^{-1}$$

$$+ e^{x+y+z} \cdot 1 \cdot x^{-1}$$

$$= e^{x+y+z} \cdot (y+1) \cdot x^{-1}$$

$$f_z(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot y \cdot x^{-1}$$

~~Der~~ Gradient wird

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x+y+z} \cdot y \cdot (x^{-1} - x^{-2}) \\ e^{x+y+z} \cdot (y+1) \cdot x^{-1} \\ e^{x+y+z} \cdot y \cdot x^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= e^{x+y+z} \begin{pmatrix} y\,(x^{-1} - x^{-2}) \\ (y+1) \cdot x^{-1} \\ y \cdot x^{-1} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$f_{xx}(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot y \cdot (x^{-1} - x^{-2})$$

$$+ e^{x+y+z} \cdot y \cdot (-x^{-2} + 2x^{-3})$$

$$= e^{x+y+z} \cdot y \cdot (x^{-1} - 2x^{-2} + 2x^{-3})$$

$$f_{xy}(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot y \cdot (x^{-1} - x^{-2})$$

$$+ e^{x+y+z} \cdot 1 \cdot (x^{-1} - x^{-2})$$

$$= e^{x+y+z} (y+1)(x^{-1} - x^{-2})$$

$$f_{xz}(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot y \cdot (x^{-1} - x^{-2})$$

$$f_{yy}(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot (y+1) \cdot x^{-1}$$

$$+ e^{x+y+z} \cdot 1 \cdot x^{-1} = \ldots$$

$$= e^{x+y+z} \cdot (y+2) \cdot x^{-1}$$

$$f_{yz}(x,y,z) = e^{x+y+z} (y+1) \cdot x^{-1}$$

$$f_{zz}(x,y,z) = e^{x+y+z} \cdot y \cdot x^{-1}$$

Dies gibt die Hessematrix

$$H_f(x,y,z)$$

$$= e^{x+y+z} \begin{pmatrix} y(x^{-1}-2x^{-2}+2x^{-3}) & (y+1)(x^{-1}-x^{-2}) & y(x^{-1}-x^{-2}) \\ (y+1)(x^{-1}-x^{-2}) & (y+2) \cdot x^{-1} & (y+1)x^{-1} \\ y(x^{-1}-x^{-2}) & (y+1)x^{-1} & y x^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}^{3\times 3}$$