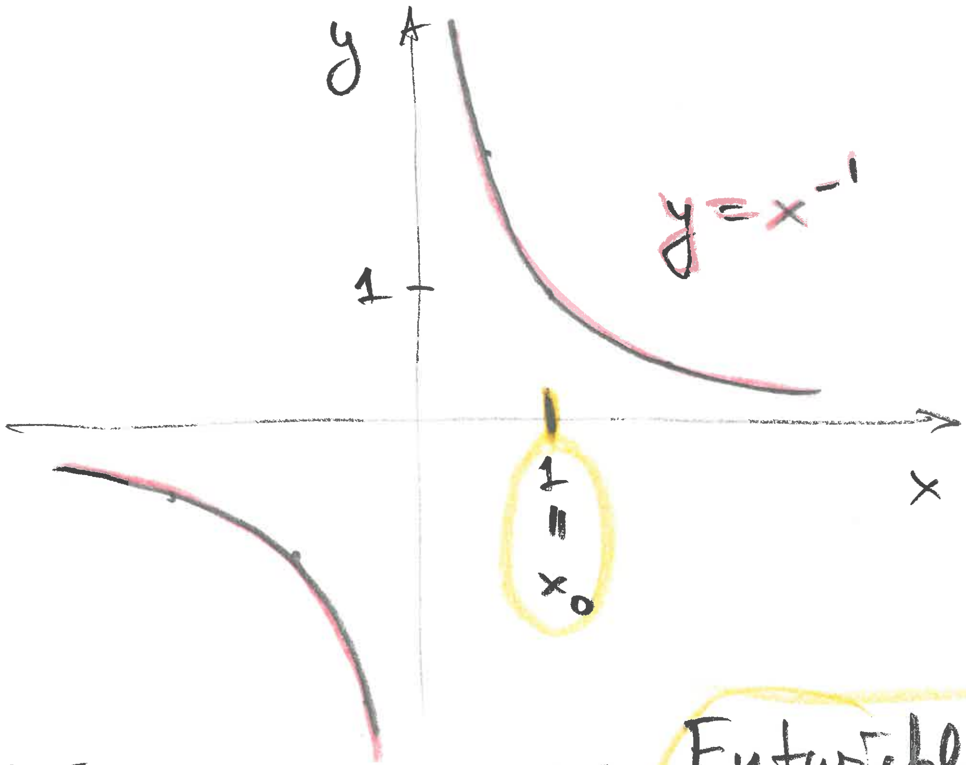
Bsp zu Taylorpolynome

Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-1}$



Sei $x_0 := 1$ unser Entwicklungspunkt.

Im ersten Bsp von § 4.6.5. wurde berechnet, für $n \geq 0$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, x^{-(n+1)}$$

Spezielle :

$$f(x) = f^{(0)}(x) = x^{-1}$$

$$f^{(0)}(x_0) = 1^{-1} = 1$$

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = -x^{-2}$$

$$f^{(1)}(x_0) = -1^{-2} = -1$$

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = 2x^{-3}$$

$$f^{(2)}(x_0) = 2 \cdot 1^{-3} = 2$$

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$$

$$f^{(3)}(x_0) = -6 \cdot 1^{-4} = -6$$

$$f''''(x) = f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$$

Damit können wir nun Taylorpolynome berechnen:

Stufe 0:

$$T_0(f, x, 1) = \frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0$$

$$= 1$$

Stufe 1:

$$T_1(f, x, 1)$$

$$= \frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1)^1$$

$$= 1 - (x-1)$$

Der Graph von $T_1(f, x, 1)$ ist die Tangente an den Graphen von $f(x) = x^{-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Wir lassen ein Taylorpolynom zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ auch als Polynom in $(x-1)$ stehen. Weitere Vereinfachungen wären zwar rechnerisch möglich (bzw: $1-(x-1) = 2-x$), würden aber dem Sinn des Taylorpolynoms zuwiderlaufen.

13.05.2025

Stufe 2 :

$T_2(f, x, 1)$

$$= \frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1)^1$$

$$+ \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2$$

Stufe 3 :

$T_3(f, x, 1)$

$$= \frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1)^1$$

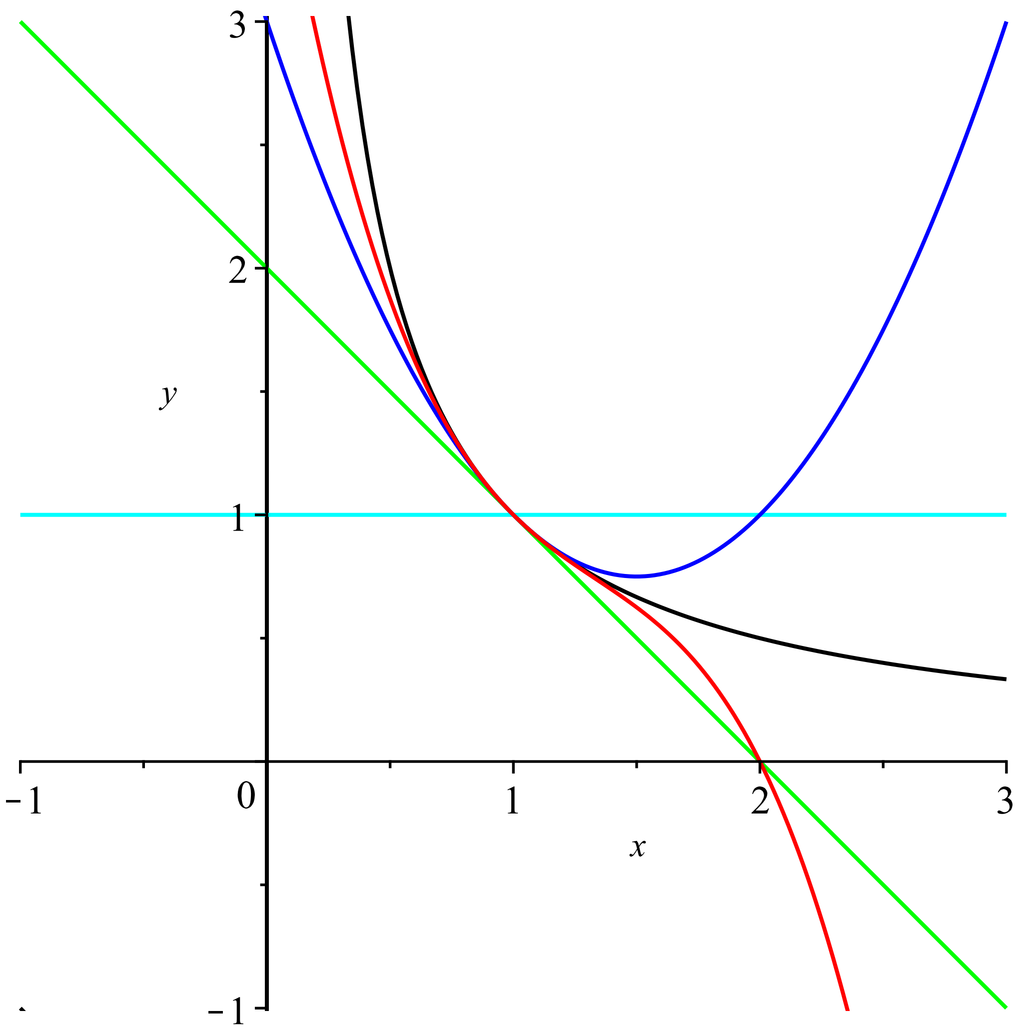
$$+ \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

Nun sind all diese Taylorpolynome Näherungen an $f(x)$ in der Nähe von $x_0 = \underline{1}$:

So z.B. ist $T_3(f, x, 1)$ die beste Näherung an $f(x)$ in der Umgebung von $x_0 = 1$ mit einem Polynom vom Grad ≤ 3.


3
2
y
1
−1
0
1
2
3
x
−1

13.05.2017

In der vorstehenden Skizze

ist : $f(x)$ schwarz

$T_0(f, x, 1)$ hellblau

$T_1(f, x, 1)$ grün (Tangente)

$T_2(f, x, 1)$ blau

$T_3(f, x, 1)$ rot

Man kann die Tatsache,

daß $T_3(f, x, 1)$ eine

Näherung von $f(x)$ ist,

mit dem Restglied

auch quantisieren :

Sei $x \in U_1(1)$.

Dann ist

$$f(x) = T_3(f, x, 1) + \underbrace{R_3(f, x, 1, \vartheta)}_{\text{Restglied}}$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

$$+ \frac{f^{(4)}(1 + \vartheta(x-1))}{4!}(x-1)^4$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

$$+ (1 + \vartheta(x-1))^{-5}(x-1)^4$$

für ein $\vartheta \in [0,1]$.

"Unschärfe"

Es stellt ϑ insofern die "Unschärfe" in dieser Gleichung dar, als daß wir es nicht genau kennen.

Wir können aber nun abschätzen:

$$\left| f(x) - T_3(f, x, 1) \right|$$

$$= \left| \left(1 + \vartheta(x-1)\right)^{-5} (x-1)^4 \right|$$

$$= \frac{(x-1)^4}{\left(1+\vartheta(x-1)\right)^5} \leq (x-1)^4$$

$\vartheta = 0$ gibt Abschätzung nach oben

13.05.20
-10

Für $x = 1{,}2$ wird also z. B.:

$$|f(1{,}2) - T_3(f, 1{,}2, 1)|$$

$$\leq (1{,}2 - 1)^4 = 0{,}0016$$

Für $x = 1{,}1$ wird also z. B.

$$|f(1{,}1) - T_3(f, 1{,}1, 1)|$$

$$\leq (1{,}1 - 1)^4 = 0{,}0001$$