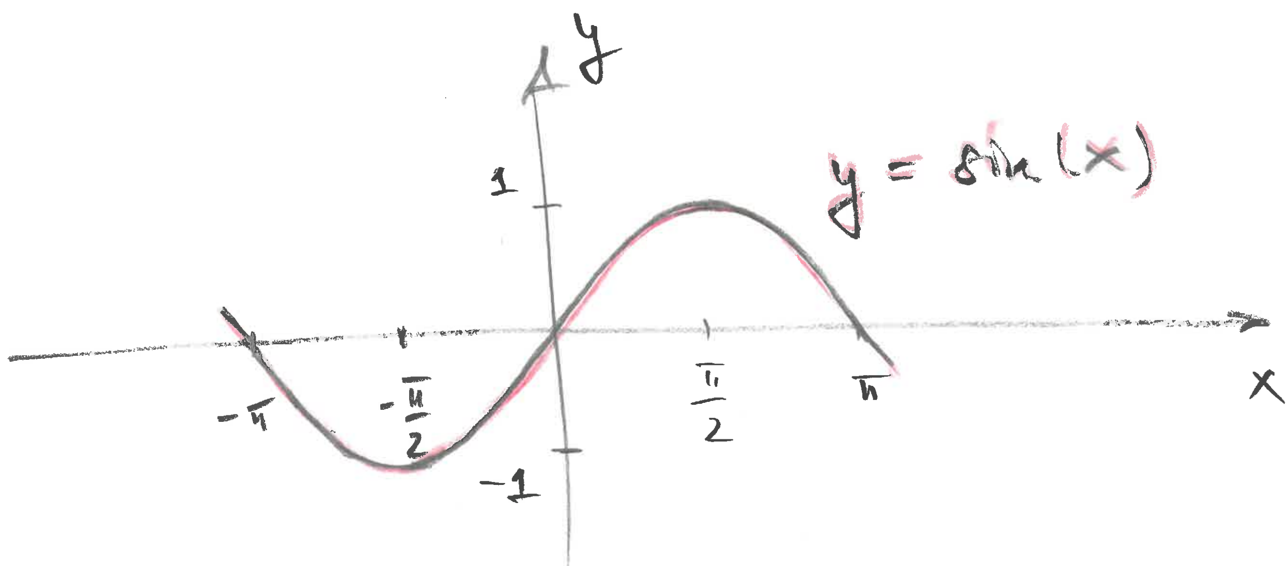
# Bsp für Taylorpolynom

Ein Beispiel, das wir im Skript nochmals unter anderem Blickwinkel betrachten wollen, das aber auch jetzt schon recht illustrativ ist:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$x \longmapsto f(x) := \sin(x)$$



(13.05.20-12)

Sei unser Entwicklungspunkt

$x_0 = 0$, Es werden:

$f^{(0)}(x) = \sin(x)$, $f^{(0)}(0) = 0$

$f^{(1)}(x) = \cos(x)$, $f^{(1)}(0) = 1$

$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$, $f^{(2)}(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos(x)$, $f^{(5)}(0) = 1$

$f^{(6)}(x) = -\sin(x)$, $f^{(6)}(0) = 0$

$f^{(7)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(7)}(0) = -1$

$$f^{(8)}(x) = \sin(x), \quad f^{(8)}(0) = 0$$

$$f^{(9)}(x) = \cos(x), \quad f^{(9)}(0) = 1$$

$$f^{(10)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(10)}(0) = 0$$

$$f^{(11)}(x) = -\cos(x), \quad f^{(11)}(0) = -1$$

$$f^{(12)}(x) = \sin(x), \quad f^{(12)}(0) = 0$$

(Natürlich stellt man hier auch ein Muster fest. Dazu im Skript später mehr.)

Es wird

$$T_0(f, x, 0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 = 0$$

$$T_1(f, x, 0)$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1$$

$$= x$$

$$T_2(f, x, 0)$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1$$

$$+ \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= x$$

13.05.20 - 15

$$T_3(f, x, 0)$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1$$

$$+ \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$= x - \frac{x^3}{6}$$

$$T_4(f, x, 0) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$T_5(f, x, 0) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$T_6(f, x, 0) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$T_7(f,x,0) = T_8(f,x,0)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

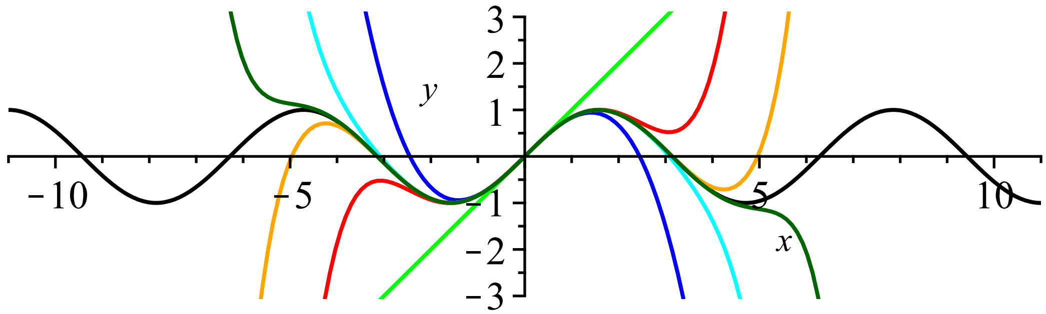
$$T_9(f,x,0) = T_{10}(f,x,0)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$$

$$T_{11}(f,x,0) = T_{12}(f,x,0)$$

$$= x - \frac{x^3}{\underset{3!}{6}} + \frac{x^5}{\underset{5!}{120}} - \frac{x^7}{\underset{7!}{5040}} + \frac{x^9}{\underset{9!}{362880}} - \frac{x^{11}}{\underset{11!}{39916800}}$$

Der Graph von $f(x) = \sin(x)$ und seine ersten Taylorpolynome:



y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−10
−5
5
10

13.05.20

-17

$f(x)$ : schwarz

$T_1(f,x,0)$ : hellgrün

$T_3(f,x,0)$ : dunkelblau

$T_5(f,x,0)$ : rot

$T_7(f,x,0)$ : hellblau

$T_9(f,x,0)$ : orange

$T_{11}(f,x,0)$ : dunkelgrün