Beispiel zu Vorlesung (Taylor):

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion,
die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $f(0) = 1$

(2) $f'(0) = -2$

(3) $f''(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

Wir wollen $f(x)$ bestimmen.

Vorgehen:

1. Die angegebenen Informationen genügen, um die Taylorreihe zu bestimmen.

...

...

2. Mittels Restglied zeigen wir, daß Funktion und Taylorreihe übereinstimmen

zu 1. Wir wollen die Taylorreihe $T_\infty(f, x, 0)$ bestimmen, um den Entwicklungspunkt 0.

Es wird

$$f^{(0)}(0) = f(0) \overset{(1)}{=} 1$$

$$f^{(1)}(0) = f'(0) \overset{(2)}{=} -2$$

$$f^{(2)}(0) = f''(0)$$

$$\overset{(3)}{=} f(0) \overset{(1)}{=} 1$$

$$f^{(3)}(0) = (f'')'(0) \overset{(3)}{=} f'(0) \overset{(2)}{=} -2$$

$$f^{(4)}(0) \overset{(3)}{=} f^{(2)}(0) \overset{\text{s.o.}}{=} 1$$

$$f^{(5)}(0) \overset{(3)}{=} f^{(3)}(0) \overset{\text{s.o.}}{=} -2$$

$$f^{(6)}(0) \overset{(3)}{=} f^{(4)}(0) \overset{\text{s.o.}}{=} 1$$

$$f^{(7)}(0) \overset{(3)}{=} f^{(5)}(0) \overset{\text{s.o.}}{=} -2$$

Und so fort.

Wir erhalten so die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $0$: ...

...



$$T_\infty(f, x, 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Einsetzen der obigen Rechnung

$$= \frac{1}{0!}x^0 + \frac{(-2)}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{(-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= \ldots$$

(15.05.20-5

$$\ldots \overset{\text{Sortieren}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Zu 2. Nun wollen wir

$$f(x) \overset{!}{=} T_\infty(f, x, 0)$$

verifizieren unter Verwendung des Korollars von Taylor.

Wir haben zu zeigen:

$$R_n(f, x, 0, \vartheta_n) \xrightarrow{!} 0$$

für jede Folge $(\vartheta_n)_{n\geq 0}$ mit $\vartheta_n \in [0,1]$ stets.

Äquivalent hierzu:

$$|R_n(f, x, 0, \vartheta_n)| \xrightarrow{!} 0$$

Es ist

$$\left| R_n(f, x, 0, \vartheta_n) \right|$$

$$= \left| \frac{f^{(n+1)}\left(0 + \vartheta_n (x-0)\right)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \right|$$

$$= \frac{\left| f^{(n+1)}(\vartheta_n x) \right|}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

Sei

$$M_0(x) := \max \left\{ |f(\vartheta x)| : \vartheta \in [0,1] \right\}$$

$$M_1(x) := \max \left\{ |f'(\vartheta x)| : \vartheta \in [0,1] \right\}$$

Detail: Diese Maxima existieren, da $f$ und $f'$ differenzierbar und also stetig sind.

Sei $\Pi(x) = \max\{\Pi_0(x), \Pi_1(x)\}$.

Dann ist

$$|f^{(n+1)}(\vartheta_n x)|$$

$$= \begin{cases} |f(\vartheta_n x)| & \text{falls } n+1 \equiv_2 0 \\ |f'(\vartheta_n x)| & \text{falls } n+1 \equiv_2 1 \end{cases}$$

$$\leq \Pi(x).$$

Somit wird

$$|R_n(f, x, 0, \vartheta_n)|$$

$$\leq \frac{\Pi(x)}{(n+1)!} |x|^{n+1} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$

Resultat: Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = T_\infty(f, x, 0)$$

$$= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) - 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

---

(Wir werden die beiden Reihen noch benennen und näher betrachten

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Kommt noch.)