Beispiel zu Reihen mit Summanden in $\mathbb{C}$

Es ist $\left|\frac{1+i}{3}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{2} < 1.$

Also ist folgende Rechnung zulässig:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^k\right) - \left(\frac{1+i}{3}\right)^0 - \left(\frac{1+i}{3}\right)^1$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-\frac{1+i}{3}} - 1 - \frac{1+i}{3}$$

$$= \ldots$$

15.05.20– 10

$$\ldots = \frac{3}{3-(1+i)} - 1 - \frac{1+i}{3}$$

$$= \frac{3}{2-i} - \frac{4}{3} - \frac{i}{3}$$

$$= \frac{3\,(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \frac{4}{3} - \frac{i}{3}$$

$$= \frac{6+3i}{5} - \frac{4}{3} - \frac{i}{3}$$

$$= \frac{18-20}{15} + i\,\frac{9-5}{15}$$

$$= -\frac{2}{15} + i\cdot\frac{4}{15}$$

Beispiel zum Ableiten

komplexwertiger Funktionen:

Sei

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x-i} \in \mathbb{C}$$

Wir haben uns in § 4.6.6. die "Selbsterlaubnis erteilt", solche Funktionen nach denselben Regeln abzuleiten.

Also:

$$f'(x) \overset{\text{Quotienten-regel}}{=} \frac{\cos(x)\cdot(x-i) - \sin(x)\cdot 1}{(x-i)^2}$$

$$= \frac{\cos(x)}{x-i} - \frac{\sin(x)}{(x-i)^2}$$

15.05.20
-12

$$f''(x) \underset{\text{Quotienten-regel}}{=} \frac{-\sin(x)(x-i) - \cos(x)\cdot 1}{(x-i)^2}$$

$$- \frac{\cos(x)(x-i)^2 - \sin(x)\cdot 2(x-i)}{(x-i)^4}$$

$$= -\frac{\sin(x)}{(x-i)} - 2\frac{\cos(x)}{(x-i)^2}$$

$$+ 2\frac{\sin(x)}{(x-i)^3}$$