15.05.20
-13

Bsp zu Konvergenzradius

Sei die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (z-1)^k$$

gegeben.

Es ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, und es liegt bei $(z-1)^k$ der Koeffizient

$$a_k = \frac{1}{k \cdot 2^k}$$

vor.* Wir wollen den Konvergenzradius dieser

* Ausnahme: $a_0 = 0$

15.05.20
−14

Potenzreihe bestimmen

Die Wurzelfolge ist

$$\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\geq 1} = \left(|a_k|^{\frac{1}{k}}\right)_{k\geq 1}$$

$$= \left(\left|\frac{1}{k\cdot 2^k}\right|^{\frac{1}{k}}\right)_{k\geq 1}.$$

Dabei wird

$$\left|\frac{1}{k\cdot 2^k}\right|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\underbrace{k^{\frac{1}{k}}}_{\to 1}\cdot 2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Die Wurzelfolge konvergiert also gegen $\frac{1}{2}$.

15.05.20
-15

Der Konvergenzradius wird:

$$\rho = \left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} = \left(\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}$$

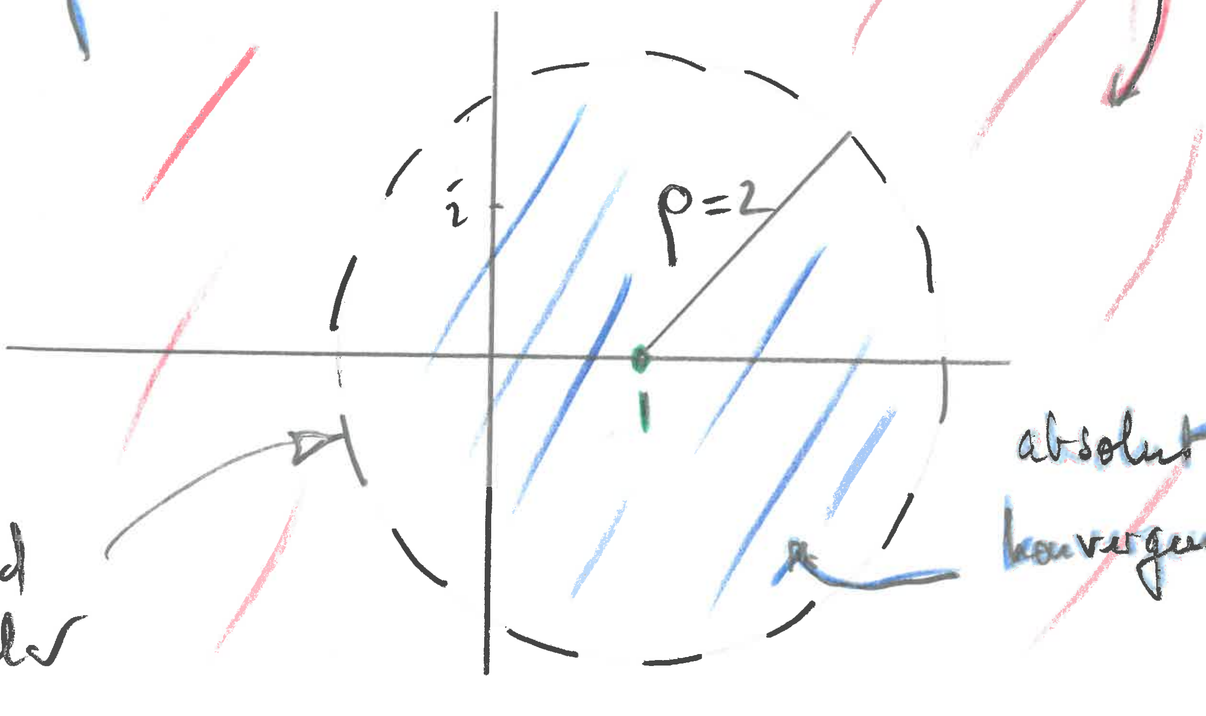
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

"rho"

Somit haben wir die Konvergenzkreisscheibe

$$U_\rho^{\mathbb{C}}(1) = U_2^{\mathbb{C}}(1)$$

nicht konvergent



auf Rand unklar

absolut konvergent

15.05.20
-16

Will sagen:

- Für $z \in \mathcal{U}_2^{\mathbb{C}}(1)$, d.h.,

für z mit $|z-1| < 2$,

ist $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (z-1)^k$$ absolut

konvergent.

- Für $z \in \mathbb{C} \setminus \underbrace{\left(\mathcal{U}_2^{\mathbb{C}}(1) \cup \partial \mathcal{U}_2^{\mathbb{C}}(1) \right)}_{\text{Kreisscheibe mit Rand}}$,

d.h. für z mit $|z-1| > 2$,

ist $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (z-1)^k$$

nicht konvergent.

- Für z auf dem Rand $\partial U_2^{\mathbb{C}}(1)$, d.h. für z mit $|z-1| = 2$, haben wir keine Aussage.

Betrachten wir einmal den Spezialfall $z = 3$.

Es wird dort

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (3-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

und das ist nicht konvergent.

Betrachten wir einmal den Spezialfall $z = -1$.

Es wird dort

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (-1-1)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$ was dank Leibniz konvergent ist.

15.05.20
-19

<u>Bsp</u> zu Konvergenzradius

Sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{2k}$$

gegeben. Es ist der Ent-

wicklungpunkt $z_0 = 0$.

Gefragt ist der

Konvergenzradius ρ.

Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{2k}$$

$$= 3^0 z^0 + 3^1 \cdot z^2 + 3^2 \cdot z^4 + \cdots$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = 3^0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1$$
$$+ 3^1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3$$
$$+ 3^2 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + \ldots$$

Erst jetzt erkennen wir die Koeffizienten alle:

$$a_k = \begin{cases} 3^m & \text{falls } k = 2m \\ 0 & \text{falls } k = 2m+1 \end{cases},$$

jeweils mit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Also

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} = \begin{cases} |3^m|^{\frac{1}{2m}} & \text{falls } k = 2m \\ 0 & \text{falls } k = 2m+1 \end{cases}$$

Wir brauchen $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$.

Also brauchen wir konvergente Teilfolgen:

$$|a_{2m}|^{\frac{1}{2m}} = |3^m|^{\frac{1}{2m}} = \sqrt{3} \to \sqrt{3}$$

$$|a_{2m+1}|^{\frac{1}{2m+1}} = 0 \qquad \to 0$$

Häufungspunkte : $0, \sqrt{3}$

Also

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \max\{0, \sqrt{3}\}$$

$$= \sqrt{3}$$

Wir erhalten den

Konvergenzradius

$$\rho = \left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$