Bsp. zu Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Gesucht sei die Lösung von von $y''' = y'' + y' - y + \sin(x)$

zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Wir setzen $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$.

Dann soll gelten

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = z_3$$

$$z_3' = -z_1 + z_2 + z_3 + \sin(x).$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix}}_{= g(x)}$$

Kurz:

$$z' = Az + g(x)$$

Wir brauchen die Jordanform zu $A$.

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ -1 & 1 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -X^2 & 0 & 1 \\ -1+X & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -X^2 & 1 \\ -1+X & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= -(1-X) \det \begin{pmatrix} -X^2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ldots = -(1-X)(-X^2+1)$$

$$= -(X-1)^2(X+1)$$

Wir haben also die folgenden

Eigenwerte:

$\lambda_1 = 1$ . mit algebraischer

Vielfachheit $aV_A(1) = 2$

$\lambda_2 = -1$ mit algebraischer

Vielfachheit $aV_A(-1) = 1$

zu $\lambda_1 = 1$ :

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots$$

$$\ldots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $E_A(1) = \operatorname{Kern}\left((A - E_3)^1\right)$

hat die Basis $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinzunahme von $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

liefert die Basis $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

von $\operatorname{Kern}\left((A - E_3)^2\right)$.

Da $2 = aV_A(1)$ Basisvektoren gefunden wurden, ist eine Basis des Hauptraums $H_A(1) = \text{Kern}((A - E_3)^2)$ erreicht.

Bilden wir Hauptvektorketten:

Mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ersetzen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis von

$\text{Kern}\left((A - 1 \cdot E_3)^1\right)$ und erhalten so die Basis

$$\left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

des Hauptraums $H_A(1)$, die aus einer einzigen Hauptvektorkette $\left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ besteht.

<u>Zu $\lambda_2 = -1$:</u>

$$A - (-1)E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots$$

$$\ldots \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $E_A(-1) = \operatorname{Kern}\left((A+E_3)^1\right)$ hat die Basis $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Da $1 = aV_A(-1)$ Basisvektor gefunden wurde, ist eine Basis des Hauptraums $H_A(-1) = \operatorname{Kern}\left((A+E_3)^1\right)$ erreicht.

Hier entfällt der Schritt, nochmals "rückwärts von oben nach unten zu rechnen" und Vektoren

zu ersetzen. Es ist

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ unsere Basis

des Hauptraums ($\overset{\text{hier}}{=}$ Eigenraums),

die aus einer einzigen

Hauptvektorkette $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ besteht.

Zusammen:

Mit $S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ist $S^{-1}AS$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: J$$

in Jordanscher Normalform.

Wir invertieren $S$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es wird $\exp(Jx)$

$$= \exp\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} x \right) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$$

Also wird*

$$\exp(Ax) = S \exp(Jx) S^{-1} = \ldots$$

---

* Vgl. Bemerkung auf 15.07.20 – 25

$$\ldots \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1+2x)e^x & -2e^x & (-3-2x)e^x \\ 2e^x & 0 & -2e^x \\ e^{-x} & -2e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (3-2x)e^x + e^{-x} & 2e^x - 2e^{-x} & (-1+2x)e^x + e^{-x} \\ (1-2x)e^x - e^{-x} & 2e^x + 2e^{-x} & (1+2x)e^x - e^{-x} \\ (-1-2x)e^x + e^{-x} & 2e^x - 2e^{-x} & (3+2x)e^x + e^{-x} \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem für $z' = Az$ ist also gegeben durch

$$\left( \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (3-2x)e^x + e^{-x} \\ (1-2x)e^x - e^{-x} \\ (-1-2x)e^x + e^{-x} \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^x - 2e^{-x} \\ 2e^x + 2e^{-x} \\ 2e^x - 2e^{-x} \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1+2x)e^x + e^{-x} \\ (1+2x)e^x - e^{-x} \\ (3+2x)e^x + e^{-x} \end{pmatrix} \right)$$

Ein Vereinfachungsschritt:

Man erkennt, daß die drei Vektoren im Fundamentalsystem sich schreiben lassen als Linearkombinationen in folgendem Tupel.

$$\left( \underbrace{e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z_{[1]}(x)}, \underbrace{e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z_{[2]}(x)}, \underbrace{e^{x}\begin{pmatrix} 0+x \\ 1+x \\ 2+x \end{pmatrix}}_{z_{[3]}(x)} \right)$$

Folglich ist auch dieses Tupel ein Fundamentalsystem.

Jede Lösung zu $z' = Az$ ist von der Form $z_{[1]}(x) \cdot c_1 + z_{[2]}(x) \cdot c_2 + z_{[3]}(x) \cdot c_3$.

15.07.2013

Um eine Partikulärlösung

$z_{[0]}(x)$ von $z' = Az + g(x)$

zu finden, machen wir den

Ansatz der Variation der

Konstanten:

$$z_{[0]}(x) = z_{[1]}(x) \cdot c_1(x) + z_{[2]}(x) \cdot c_2(x) + z_{[3]}(x) \cdot c_3(x) = \sum_{j=1}^{3} z_{[j]}(x)\, c_j(x)$$

Dann wird

$$z'_{[0]}(x) = \sum_{j=1}^{3} z_{[j]}(x)\, c'_j(x) + \sum_{j=1}^{3} z'_{[j]}(x)\, c_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} z_{[j]}(x)\, c'_j(x) + \sum_{j=1}^{3} A z_{[j]}\, c_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} z_{[j]}(x)\, c'_j(x) + A\, z_{[0]}(x).$$

Damit wird

$$z_{[0]}'(x) \overset{!}{=} A\, z_{[0]}(x) + g(x)$$

zu $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} z_{[j]}(x)\, c_j'(x) \overset{!}{=} g(x)$,

also zu:

$$\begin{array}{cccc} c_1'(x) & c_2'(x) & c_3'(x) & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & e^{x} & e^{x}\cdot x & 0 \\ -e^{-x} & e^{x} & e^{x}\cdot(1+x) & 0 \\ e^{-x} & e^{x} & e^{x}\cdot(2+x) & \sin(x) \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & e^{x} & e^{x}\cdot x & 0 \\ 0 & 2e^{x} & e^{x}(1+2x) & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{x} & \sin(x) \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & 0 & 0 & \frac{1}{4}\sin(x) \\ 0 & e^{x} & 0 & \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right)\sin(x) \\ 0 & 0 & e^{x} & \frac{1}{2}\sin(x) \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e^{x} \cdot \frac{1}{4} \sin(x) \\ 0 & 1 & 0 & e^{-x}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right) \sin(x) \\ 0 & 0 & 1 & e^{-x} \frac{1}{2} \sin(x) \end{array}\right)$$

Also:

$$c_1'(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(x)\, e^{x}$$

$$c_2'(x) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right) \sin(x)\, e^{-x}$$

$$c_3'(x) = \frac{1}{2} \sin(x)\, e^{-x}$$

Folgende Nebenrechnungen dienen der Berechnung von $c_1(x)$, $c_2(x)$, $c_3(x)$,

Nebenrechnung 1:

$$\int e^{x} \sin(x)$$

$$= \left[ e^{x} \left(-\cos(x)\right)\right] - \int e^{x} \left(-\cos(x)\right) dx$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \left[-e^x \cos(x)\right] + \int e^x \cos(x)\,dx$$

$$= \left[-e^x \cos(x)\right] + \left[e^x \sin(x)\right]$$

$$- \int e^x \sin(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin(x) = \left[\frac{1}{2} e^x \left(\sin(x) - \cos(x)\right)\right]$$

Nebenrechnung 2:

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

$$= \left[e^x \sin(x)\right] - \int e^x \sin(x)\,dx$$

$$= \left[e^x \sin(x)\right] - \left(\left[e^x \left(-\cos(x)\right)\right] dx\right.$$

$$\left.- \int e^x \left(-\cos(x)\right) dx\right)$$

$$= \left[e^x \left(\sin(x) + \cos(x)\right)\right]$$

$$- \int e^x \cos(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos(x)\,dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} e^x (\sin(x) + \cos(x)) \right]$$

Nebenrechnung 3

$$\int x \sin(x) e^x \,dx$$

$$\overset{NR1}{=} \left[ x \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) \right]$$

$$- \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x))\, dx$$

$$\overset{NR1}{=} \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \int e^x \cos(x)\, dx$$

$$\overset{NR2}{=} \ldots$$

$$\ldots \left[ \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\cdot e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}\,x e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}e^{x}\cos(x)\right]$$

Also

$$\left[c_1(x)\right] = \int \frac{1}{4}\sin(x)\,e^{x}\,dx$$

$$\overset{\text{NR1,3}}{=} \left[\frac{1}{8}e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)\right]$$

Also, da wir nur <u>eine</u> partikuläre Lösung suchen, ...

$$\ldots \quad c_1(x) = \frac{1}{8} e^{x} (\sin(x) - \cos(x))$$

Ferner:

$$[c_2(x)] = \int \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right) \sin(x)\, e^{-x}\, dx$$

$$\underset{u=-x}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \int \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}u\right) \sin(u)\, e^{u}\, du$$

$$\overset{\text{NR 1,3}}{=} \Big[ \frac{1}{4} u e^{u} (\sin(u) - \cos(u))$$
$$+ \frac{1}{8} e^{u} (-\sin(u) + 3\cos(u)) \Big]$$

$$= \Big[ \frac{1}{4} x e^{-x} (\sin(x) + \cos(x))$$
$$+ \frac{1}{8} e^{-x} (\sin(x) + 3\cos(x)) \Big],$$

also

$$c_2(x) = \frac{1}{4} x e^{-x} (\sin(x) + \cos(x))$$
$$+ \frac{1}{8} e^{-x} (\sin(x) + 3\cos(x))$$

Ferner:

$$\left[c_3(x)\right] = \int \frac{1}{2} \sin(x)\, e^{-x}\, dx$$

$$\overset{u=-x}{=} \int \frac{1}{2} \sin(u)\, e^{u}\, du$$

$$\overset{\text{NR1}}{=} \left[\frac{1}{4} e^{u} \left(\sin(u) - \cos(u)\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{4} e^{-x} \left(\sin(x) + \cos(x)\right)\right],$$

also $c_3(x) = -\frac{1}{4} e^{-x} \left(\sin(x) + \cos(x)\right)$

Somit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$z_{[0]}(x) = z_{[1]}(x)\, c_1(x) + z_{[2]}(x)\, c_2(x) + z_{[3]}(x)\, c_3(x)$$

$$= \ldots$$

$$\ldots \quad e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{8}e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)$$

$$+\,e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}xe^{-x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\frac{1}{8}e^{-x}\left(\sin(x)+3\cos(x)\right)\right)$$

$$+\,e^{x}\begin{pmatrix}x\\1+x\\2+x\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}e^{-x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\\ *\\ *\end{pmatrix}$$

Wir sind nur am ersten Eintrag interessiert, da dieser das y liefert.

Alle Lösungen für $z$ sind also von der Form

$$z(x) = z_{[0]}(x) + z_{[1]}(x)\,c_1 + z_{[2]}(x)\,c_2 + z_{[3]}(x)\,c_3$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\sin(x) + \cos(x)\right) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x} \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und wobei uns wieder die unteren beiden Einträge nicht interessieren.

Der erste Eintrag liefert

$$y = y(x) = \frac{1}{4}\left(\sin(x) + \cos(x)\right) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x}$$

Wir machen hier einmal eine Probe:

$$y(x) = \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x}$$

$$y'(x) = \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x) - c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 (x+1) e^{x}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\cos(x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 (x+2) e^{x}$$

$$y'''(x) = -\frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x) - c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 (x+3) e^{x}$$

$$\Rightarrow\ y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y(x) - \sin(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Das paßt, vgl. 15.07.20 – 1

Nun kümmern wir uns um die Anfangsbedingungen:

$$0 \overset{!}{=} y(0) = \frac{1}{4} + c_1 + c_2$$

$$0 \overset{!}{=} y'(0) = \frac{1}{4} - c_1 + c_2 + c_3$$

$$0 \overset{!}{=} y''(0) = -\frac{1}{4} + c_1 + c_2 + 2c_3$$

Also

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 2 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \implies \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{8} \\ c_2 = -\frac{3}{8} \\ c_3 = \frac{1}{4} \end{array}$$

15.07.20-25

Somit ist

$$y = y(x) = \frac{1}{4}\left(\sin(x) + \cos(x)\right) + \frac{1}{8}e^{-x} - \frac{3}{8}e^{x} + \frac{1}{4}xe^{x}$$

die Lösung von $y''' = y'' + y' - y + \sin(x)$

zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

<u>Bem</u>: Man hätte auf 15.07.20-10 statt $\exp(Ax) = S\exp(Jx)S^{-1}$

zu berechnen, auch

$$\exp(Ax)S = S\exp(Jx)$$

berechnen können. Auch diese

Matrix hat in den Spalten ein Fundamentalsystem.

Also:

$$S \exp(Jx)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^x & (2-x)e^x & e^{-x} \\ -e^x & (1-x)e^x & -e^{-x} \\ -e^x & -xe^x & e^{-x} \end{pmatrix}$$

Im wesentlichen spart man sich so den Vereinfachungsschritt auf 15.07.20 – 12.

Diese Sparmaßnahme kann immer dann eingesetzt werden, wenn $S$ reelle Einträge hat.