Bsp zu Definitheit von Matrizen

Sei
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

$\Rightarrow e_1^t A e_1 = 3 > 0$

$\Rightarrow e_3^t A e_3 = -1 < 0$

Also ist A indefinit

Das Hauptminorenkriterium zu verwenden, wäre aufwendig gewesen.

Die Eigenwerte auszurechnen, wäre sehr aufwendig gewesen.

Bsp zu Definitheit von Matrizen:

(1) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

Wir verwenden das Hauptminorenkriterium:

$$M_1(A) = \det(-3) = -3$$

$$M_2(A) = \det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = 11$$

$$M_3(A) = \det\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 0 \\ -8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = -13.$$

Somit haben wir

abwechselndes Vorzeichen,

beginnend mit einem negativen:

$$\Pi_1(A) < 0, \quad \Pi_2(A) > 0, \quad \Pi_3(A) < 0$$

Also ist A negativ definit.

(2) Sei $B := -A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Es ist

$$\Pi_1(B) = (-1)^1 \Pi_1(A) = 3 > 0$$

$$\Pi_2(B) = (-1)^2 \Pi_2(A) = 11 > 0$$

$$\Pi_3(B) = (-1)^3 \Pi_3(A) = 13 > 0$$

Also ist B positiv definit

Bsp zu Definitheit von Matrizen.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Es ist $\det(A) = \Pi_3(A) = 0$,

da $\operatorname{Rang}(A) = 2 < 3$ ist.

Also ist A weder positiv definit noch negativ definit.

Da aber $\det(A) = 0$ ist, können wir nicht folgern, daß A indefinit ist.

Und in der Tat ist

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\dots = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ X & 1-X & 0 \\ X & 0 & -X \end{pmatrix}$$

$$= X \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ X & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= X \cdot \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ X & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -X \cdot \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 \\ X & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= -X\left((2-X)(1-X) - 1 \cdot X \right)$$

$$= -X\left(X^2 - 4X + 2 \right).$$

Die Nullstellen von $\chi_A(X)$ sind 0, $\underbrace{2-\sqrt{2}}_{>0}$, $\underbrace{2+\sqrt{2}}_{>0}$

Die Eigenwerte sind also

weder alle positiv

noch alle negativ

noch gibt es unter ihnen

einen positiven und einen

negativen.

Somit ist A weder

positiv definit noch negativ

definit noch indefinit.

Allgemein bedeutet dies:

Hat man festgestellt, daß A weder positiv definit noch negativ definit ist, so kann man nur dann daraus bereits schließen, daß A indefinit ist, wenn man $\det(A) \neq 0$ weiß.

Und das muß dem Korrektor auch mitgeteilt werden.

Bsp zur Definitheit von Matrizen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Für welche t ist

$$A_t = \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

positiv definit?

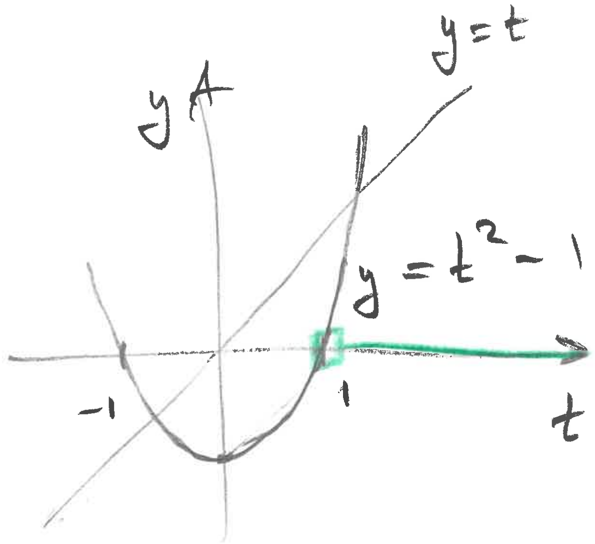
Hauptminorenkriterium:

$$M_1(A) = t$$

$$M_2(A) = t^2 - 1$$

Es muß $M_1(A) = t > 0$ ...

und $\Pi_2(A) = t^2 - 1 > 0$ sein.



Dies ist für $t \in \mathbb{R}_{>1}$ der Fall: dort ist A_t positiv definit.