<u>Bsp</u> zu Extremwerte.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$:= (x^2+y^2-4) \cdot x$$

Wir wollen die lokalen Extremstellen und die Sattelstellen von f bestimmen.

1. Wir bestimmen die Flachstellen von f als Nullstellen des Gradienten.

Es ist $f(x,y) = (x^2+y^2-4) \cdot x$

$$= x^3 + xy^2 - 4x.$$

Also ist der Gradient

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 - 4 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Nullsetzen gibt:

$$3x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$2xy = 0$$

Zweite Gleichung gibt:

$x = 0$ oder $y = 0$

- Fall $x = 0$: $y^2 - 4$ gibt

  $y = 2$ oder $y = -2$.

Wir haben aus diesem Fall die Flachstellen $(0,2)$ und $(0,-2)$.

- Fall $y=0$: $3x^2-4$ gibt

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Wir haben aus diesem Fall die Flachstellen $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ und $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

Insgesamt haben wir die Flachstellen:

$$(0,2),\ (0,-2),\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

2. Untersuchung jeder Flachstelle, ob sie lokale Extremstelle oder Sattelstelle ist:

Die Hessematrix ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

- Flachstelle $(0,2)$: Es wird

$$H := H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

Es ist $\Delta_1(H) = \det(0) = 0$.

Also ist H weder positiv

noch negativ definit.

Es ist $\det(H) = -16 \neq 0$.

Somit dürfen wir schließen,

daß H indefinit ist.

Also ist $(0,2)$ eine

Sattelstelle von f.

- Flachstelle $(0,-2)$. Es wird

$$H := H_f(0,-2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\Pi_1(H) = \det(0) = 0$.

Also ist H weder positiv noch negativ definit.

Zudem ist $\det(H) = -16 \neq 0$.

Also ist H indefinit.

Also ist $(0,-2)$ eine Sattelstelle von f.

- Flachstelle $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

Es wird

$$H := H_f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

17.06.2016

Die Eigenwerte von H

sind $\underbrace{6\sqrt{3}}_{>0}$ und $\underbrace{\frac{4}{\sqrt{3}}}_{>0}$.

Also ist H positiv

definit

Somit ist $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

eine lokale Minimalstelle

von f.

- Flachstelle $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

Es wird

$$H := H_f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von H sind

$$\underbrace{-6\sqrt{3}}_{<0} \quad \text{und} \quad \underbrace{-\frac{4}{\sqrt{3}}}_{<0}.$$

Also ist H negativ

definit.

Somit ist $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

eine lokale Maximalstelle

von f.

Unsere Flachstellen sind

also insgesamt von der

folgenden jeweiligen Art:

17.06.2018

Liste der Flachstellen von f:

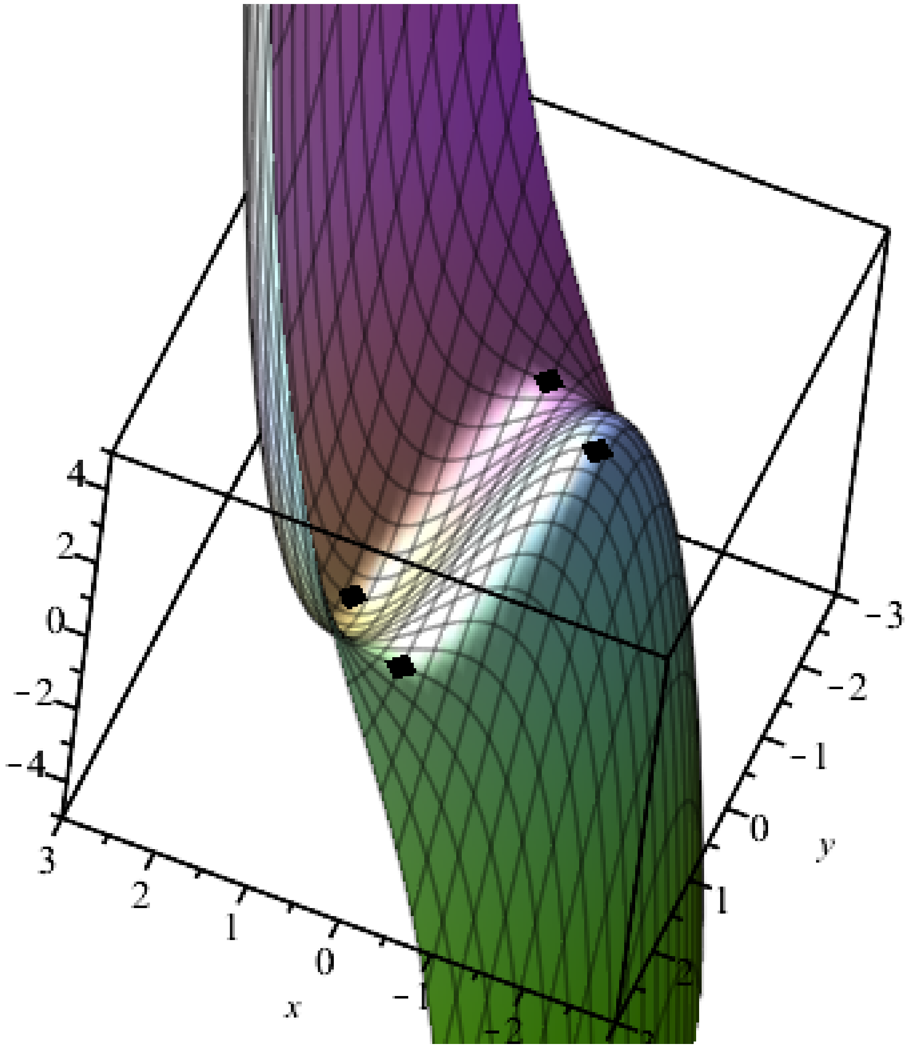
Sattelstelle $(0, 2)$

Sattelstelle $(0, -2)$

Lokale Minimalstelle $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

Lokale Maximalstelle $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

Wir wollen uns den Graphen von f ansehen und an ihm die Flachstellen zu erkennen versuchen.



4
2
0
−2
−4
3
2
1
0
−1
−2
x
−3
−2
−1
0
1
2
y

Die schwarzen Punkte in dieser Graphik sind die zu den Flachstellen gehörenden Punkte auf dem Graphen:

$$\left(0, 2, f(0,2)\right) = (0, 2, 0)$$

$$\left(0, -2, f(0,-2)\right) = (0, -2, 0)$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$$