<u>Bsp</u> für Bernoullische Differentialgleichung

Wir suchen auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Lösung von

$$y' = y x^{-1} + y^{\frac{1}{2}}$$

zur Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Substitution: $u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$

$$u' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$$

$$= \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \left(y x^{-1} + y^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} x^{-1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} u x^{-1} + \frac{1}{2}$$

zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:

$$u' = \frac{1}{2} u x^{-1}$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{u'}{u}\,dx = \int \frac{1}{2} x^{-1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = [\ln(|u|)]$$

$$\int \frac{1}{2} x^{-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(|x|)\right] \overset{x>0}{=} \left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad |u| = e^{\frac{1}{2}\ln(x)} \cdot e^{c} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt{x} \cdot d \qquad \text{mit } d \in \mathbb{R}$$

($d = 0$ auch)

Variation der Konstanten:

$$u = \sqrt{x} \cdot d(x)$$

$$u' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot d(x) + x^{\frac{1}{2}} d'(x)$$

Zu lösen ist

$$u' = \frac{1}{2} u x^{-1} + \frac{1}{2},$$

also

$$\underline{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} d(x)} + x^{\frac{1}{2}} d'(x) = \underline{\frac{1}{2} \sqrt{x}\, d(x) \cdot x^{-1}} + \frac{1}{2},$$

also ...

$$\ldots \quad x^{\frac{1}{2}}\, d'(x) = \frac{1}{2},$$

also $$d'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}.$$

Nebenrechnung: $$\int \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[x^{\frac{1}{2}} \right]$$

Also $$d(x) = x^{\frac{1}{2}} + s,$$ wobei $s \in \mathbb{R}$.

Somit wird

$$\begin{aligned} u = u(x) &= \sqrt{x} \cdot d(x) \\ &= \sqrt{x}\left(x^{\frac{1}{2}} + s \right) \\ &= x + s\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} y = g(x) &= u(x)^2 \\ &= \left(x + s\sqrt{x} \right)^2, \end{aligned}$$

wobei $s \in \mathbb{R}$

Die Anfangsbedingung verlangt:

$$1 \overset{!}{=} y(1) = (1 + s\sqrt{1})^2$$

$$\Rightarrow \quad 1+s = 1 \quad \text{oder} \quad 1+s = -1$$

Also $s = 0$ oder $s = -2$

Fall $s = -2$:

$$y(x) = (x - 2\sqrt{x})^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}_{>0}.$$

Probe!

$$y'(x) = 2(x - 2\sqrt{x})(1 - x^{-\frac{1}{2}})$$

$$\overset{?}{\|}$$

$$y(x) \cdot x^{-1} + y(x)^{\frac{1}{2}} = \ldots$$

$$\ldots = (x - 2\sqrt{x})^2 \cdot x^{-1}$$

$$+ |x - 2\sqrt{x}|$$

Also

$$(x - 2\sqrt{x}) \cdot (2 - 2x^{-\frac{1}{2}})$$

$$\overset{?}{=} (x - 2\sqrt{x})(1 - 2x^{-\frac{1}{2}}) + |x - 2\sqrt{x}|$$

Das ist <u>nicht</u> dasselbe, wenn

$x - 2\sqrt{x} < 0$ ist, also z. B.

für $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} < 0$.

Probe <u>nicht</u> überstanden.

17.07.20-6

Fall $s = 0$:

$$y(x) = x^2$$

$$y'(x) = 2x$$

$$\overset{?}{\|}$$

$$y(x) \cdot x^{-1} + y(x)^{\frac{1}{2}} = x^2 \cdot x^{-1} + \sqrt{x^2}$$

$$= x + |x|$$

$$\overset{x>0}{=} 2x$$

Paßt.

Ergebnis:

$y = y(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.