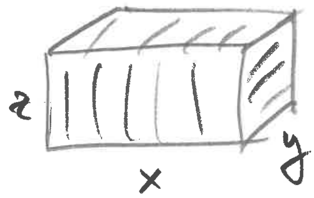
Bsp für lokale Extremstellen unter Nebenbedingungen

Sei ein quaderförmiger Kasten zu bauen mit gegebener Oberfläche = 6 und maximalem Volumen.



Natürlich vermutet man, daß der Kasten dann ein Würfel sein sollte. Dies wollen wir bestätigen.

Als Bestätigung genüge uns, eine lokale Maximalstelle vorliegen zu haben (da unsere Methoden nicht mehr hergeben).

Seien also die Kantenlängen des Kastens x, y, z.

Sein Volumen ist xyz.
Seine Oberfläche ist $2xy + 2yz + 2xz$.

Also:

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) := xyz$$

$$g_1 : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$(x, y, z) \longmapsto g_1(x, y, z) := 2xy + 2yz + 2xz - 6$$

$$g := (g_1)$$

Gesucht: Lokale Extremstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Die Gradienten sind

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix},$$

$$\nabla_{g_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y+2z \\ 2x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$

Das Lagrange-Gleichungssystem ist:

$$yz = \lambda_1 (2y+2z) \qquad (1)$$

$$xz = \lambda_1 (2x+2z) \qquad (2)$$

$$xy = \lambda_1 (2x+2y) \qquad (3)$$

$$2xy+2yz+2xz-6=0 \qquad (4)$$

Da $x,y,z>0$, muß $\lambda_1 \neq 0$ sein.

19.06.2014

Die Differenz $x \cdot (1) - y \cdot (2)$ gibt:

$$0 = 2\lambda_1 \left(\cancel{xy} + xz - \cancel{yx} - yz \right)$$

$$= 2\lambda_1 (x-y) z .$$

Es folgt $x = y$, da $\lambda_1 \neq 0$

und $z > 0$.

Die Differenz $x \cdot (1) - z \cdot (3)$ gibt

$$0 = 2\lambda_1 \left(xy + \cancel{xz} - \cancel{zx} - zy \right)$$

$$= 2\lambda_1 (x-z) y$$

Es folgt $x = z$, da $\lambda_1 \neq 0$

und $y > 0$.

Somit ist $x = y = z$.

Aus (4) wird $6x^2 = 6$,

wegen $x > 0$ also $x = 1$.

Wir haben die folgende Flachstelle

unter Nebenbedingung $g = 0$

erhalten:

$$(1, 1, 1), \quad \text{mit } \lambda_1 = \frac{1}{4}$$

Probe: Setzt man im

Lagrange - Gleichungssystem

$x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{4}$,

so erhält man 4 erfüllte

Gleichungen.

Auch ist dort $N(1,1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

vom Rang 1, wie gewünscht

Nun hätten wir noch gerne an dieser Stelle eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ vorliegen.

Wir bilden die Hessematrizen

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{g_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es wird

$$H := H_f(1,1,1) - \underbrace{\lambda_1}_{1/4} H_{g_1}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $N(1,1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Das LGS $(4\ 4\ 4 \mid 0)$ führt auf

$U := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es wird

$$U^t H U$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$. Wegen der

Hauptminoren $\det(-1) = -1 < 0$ und ...

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

ist $u^t H u$ negativ definit.

Also ist

$$(1, 1, 1)$$

eine lokale Maximalstelle

unter Nebenbedingung $g = 0$.

Das ist der erwartete Würfel: