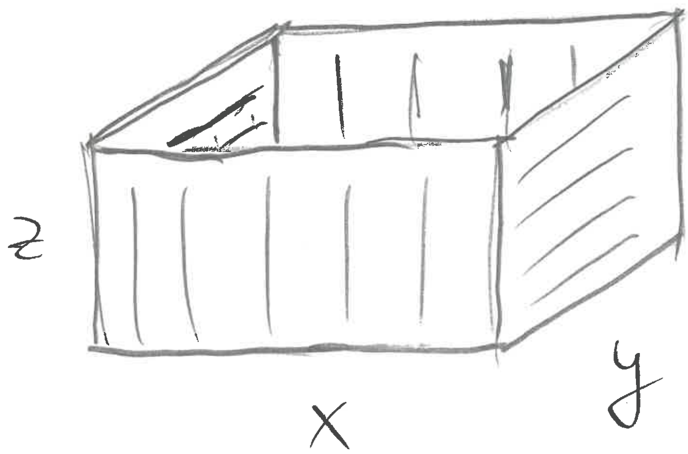
19.06.20-9

Bsp für lokale Extremstellen unter Nebenbedingungen.

Sei ein quaderförmiger Kasten zu bauen mit gegebener Oberfläche = 12 und maximalem Volumen, aber mit fehlendem oberen Deckel:



Wir erwarten nun keine Würfelform mehr und müssen uns überraschen lassen.

Es genüge uns aber wieder, eine <u>lokale</u> Maximalstelle zu finden.

Volumen: xyz

Oberfläche: $xy + 2yz + 2xz$

Also:

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} :$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) := xyz$$

$$g_1 : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y, z) \longmapsto g_1(x, y, z) := xy + 2yz + 2xz - 12$$

$$g := (g_1)$$

19.06.20-11

Gesucht: lokale Extremstellen von f unter Nebenbedingung $g=0$.

Die Gradienten sind

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+2z \\ x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$

Das Lagrange-Gleichungssystem ist:

$$yz = \lambda_1(y+2z) \qquad (1)$$

$$xz = \lambda_1(x+2z) \qquad (2)$$

$$xy = \lambda_1(2x+2y) \qquad (3)$$

$$xy + 2yz + 2xz - 12 = 0 \qquad (4)$$

Da $x, y, z > 0$, muß $\lambda_1 \neq 0$ sein.

Die Differenz $x \cdot (1) - y \cdot (2)$ gibt:

$$0 = \lambda_1 (\cancel{xy} + 2xz - \cancel{yx} - 2yz)$$

$$= 2\lambda_1 (x-y) z$$

Es folgt $x = y$, da $\lambda_1 \neq 0$ und $z > 0$.

Dies setzen wir in unser Lagrange - Gleichungssystem ein: ...

$$\ldots \qquad xz = \lambda_1 (x + 2z) \qquad (1)$$

$$xz = \lambda_1 (x + 2z) \qquad (2)$$

$$x^2 = \lambda_1 \cdot 4x \qquad (3)$$

$$x^2 + 4xz - 12 = 0 \qquad (4)$$

Aus (3) und aus $x > 0$

folgt: $\dfrac{x}{4} = \lambda_1$.

Einsetzen in (1) und (4) gibt:

$$xz = \frac{x}{4}(x + 2z) \qquad (1)$$

$$x^2 + 4xz = 12 \qquad (4)$$

19.06.20-14

Aus (1) folgt wegen $x > 0$:

$$z = \frac{1}{4}(x + 2z)$$

Also $2z = x$. Einsetzen in (4)

gibt:

$$4z^2 + 8z^2 = 12$$

Also $z = 1$. Also $x = 2$.

Also $y = 2$. Also $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Wir haben folgende Flachstelle

unter Nebenbedingung $g = 0$

gefunden:

$(2, 2, 1)$ mit $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Nach dieser verwickelten Rechnung müssen wir die Probe ernst nehmen: Wir setzen

$x = 2, \; y = 2, \; z = 1, \; \lambda_1 = \frac{1}{2}$

in das Lagrange-Gleichungssystem auf S. 19.06.20 – 11 ein:

$$2 \cdot 1 = \frac{1}{2}(2 + 2 \cdot 1) \quad (1)$$

$$2 \cdot 1 = \frac{1}{2}(2 + 2 \cdot 1) \quad (2)$$

$$2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot 2) \quad (3)$$

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 12 = 0 \quad (4)$$

Alle Gleichungen sind erfüllt.

Zudem ist $N(2,2,1) = \begin{pmatrix} 2+2\cdot 1 \\ 2+2\cdot 1 \\ 2\cdot 2+2\cdot 2 \end{pmatrix}$

einzige Spalte $\nabla g_1(1,1,1)$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

von Rang 1, wie gewünscht.

Nun sollten wir noch die Art der gefundenen Flachstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ermitteln:

Wir bilden die Hessematrizen

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{g_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es wird

$$H := H_f(2,2,1) - \underbrace{\lambda_1}_{1/2} H_{g_1}(2,2,1)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $N(2,2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Das LGS $\left(4 \;\; 4 \;\; 8 \,\middle|\, 0\right)$ führt auf

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19.06.20-18

Es wird

$$\mathfrak{u}^t H \mathfrak{u}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} .$$

Wegen der Hauptminoren

$\det(-1) = -1 < 0$ und

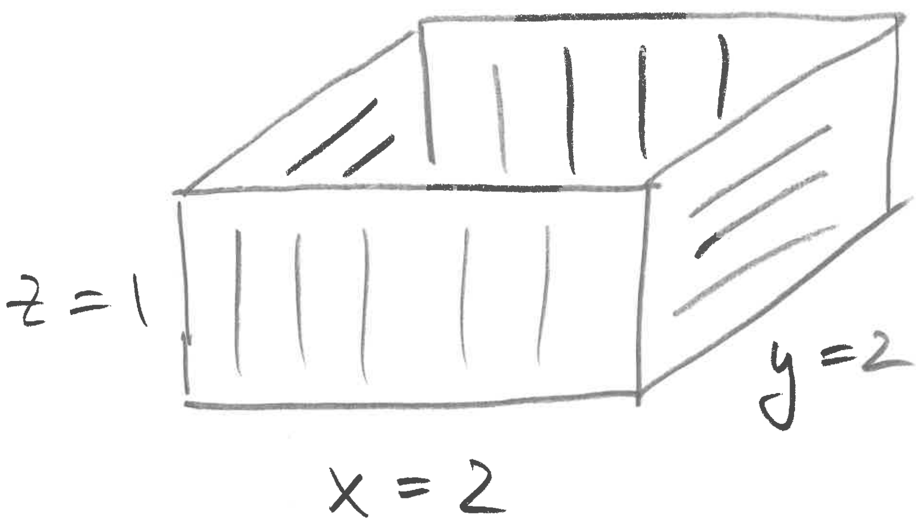
$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = 3 > 0$

ist $\mathfrak{u}^t H \mathfrak{u}$ negativ definiert.

Also ist

$$(2, 2, 1)$$

eine lokale Maximalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.



19.06.20-20

Bemerkung Man hätte in § 5.4 auch noch die Anzahl l der Nebenbedingungen gleich 0 zulassen können. Dann erhält man genau das Verfahren aus § 5.3 für lokale Extremstellen (ohne Nebenbedingung) wieder zurück:

- Das Lagrange-Gleichungssystem ist nun $\nabla_f(\hat{x}) = 0$.
  Sei $\hat{x}$ eine Lösung, d.h. eine Flachstelle von f.

- Es ist $N(\hat{x}) = \left(\,\right) \in \mathbb{R}^{n\times 0}$ (sic).
  Somit können wir $U = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E_n$ wählen.

- Es ist
  $$H = H_f(\hat{x}) - 0$$
  $$= H_f(\hat{x}).$$

Damit wird

$$U^t H U = E_n^t \, H_f(\hat{x}) \, E_n$$

$$= H_f(\hat{x}) \, .$$

Und je nachdem, ob dieses $H_f(\hat{x})$ negativ definit, positiv definit oder indefinit ist, liegt eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle vor. — Wie auch schon in § 5.3 verkündet.

Die Erkenntnis "§ 5.3 ist Spezialfall von § 5.4" kann nun beim Einprägen der Schritte vielleicht helfen.