Bsp zu Konvergenzradius u/a Quotientenfolge

Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z+i)^n$$

Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = -i$.

Die Quotientenfolge wird:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right|$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \longrightarrow e^{-1}$$

Sie ist also konvergent, und wir können mit ihr den Konvergenzradius bestimmen:

$$\rho = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}$$

$$= \left(e^{-1}\right)^{-1} = e$$

$$\approx 2{,}71828$$

Bsp zu Konvergenzradius

Wir betrachten die

Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k ,$$

wobei $$a_k := \begin{cases} 2 & \text{falls } k \equiv_2 0 \\ 1 & \text{falls } k \equiv_2 1 \end{cases}$$

Also

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 2z^0 + 1 \cdot z^1 + 2 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 + 2z^4 + 1 \cdot z^5 + \ldots$$

Entwicklungspunkt : $z_0 = 0$

1. Die Wurzelfolge wird

$$|a_k|^{1/k} = \begin{cases} 2^{1/k} & \text{falls } k \equiv_2 0 \\ 1^{1/k} & \text{falls } k \equiv_2 1 \end{cases}$$

Wir haben konvergente Teilfolgen:

$$|a_{2m}|^{\frac{1}{2m}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} \longrightarrow 1$$

$$|a_{2m+1}|^{\frac{1}{2m+1}} = 1^{\frac{1}{2m+1}} = 1 \longrightarrow 1$$

Der einzige Häufungspunkt ist also 1.

Also konvergiert die Folge gegen 1.

Es wird der Konvergenzradius:

$$\rho = \left(\limsup_{k \to \infty} |a_k|^{1/k} \right)^{-1}$$

$$= \left(\lim_{k \to \infty} |a_k|^{1/k} \right)^{-1} = 1^{-1}$$

$$= 1$$

2. Die Quotientenfolge wird

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } k \equiv_2 0 \\ 2 & \text{falls } k \equiv_2 1 \end{cases}$$

Sie hat Häufungspunkte 2 und $\frac{1}{2}$, konvergiert also nicht: Und auch

Ihre Häufungspunkte $\frac{1}{2}$, 2

oder ihr limes superior 2

haben mit dem tatsächlichen

Konvergenzradius $\rho = 1$

<u>nichts</u> zu tun.

Die Quotientenfolge

konvergiert hier nicht

und hilft also nichts.

20.05.20-7

Bem.: Insgesamt ist die Situation folgende:

- Wurzelkriterium für allgemeine Reihe: limsup hilft
- Quotientenkriterium für allgemeine Reihe: limsup hilft
- Wurzelfolge für Potenzreihe: limsup hilft
- Quotientenfolge für Potenzreihe: nur lim hilft.