**Bsp** zu de Moivre

Es wird

$$\exp\left(1+\frac{\pi}{2}i\right)$$

$$= e^{1+\frac{\pi}{2}i}$$

$$= e^{1} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$= e \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= e \cdot i$$

**Bsp** zu de Moivre

Es wird

$$\cos(i) = \frac{1}{2}\left(e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-1} + e\right) \approx 1{,}543$$

<u>Bem</u> zu de Moivre

Wir hatten in § 2.12 eine Formel zur Multiplikation komplexer Zahlen (ungleich 0):

Ist $z = |z| \cdot \left( \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \right)$

und $w = |w| \cdot \left( \cos(\psi) + i \sin(\psi) \right)$,

dann ist

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \left( \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) \right)$$

Das können wir nun besser verstehen: Es ist

$$z = |z| \cdot \left( \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \right)$$

$$\overset{\text{neu}}{=} |z| \cdot e^{i\varphi}$$

$$w = |w| \cdot \left( \cos(\psi) + i \sin(\psi) \right)$$

$$\overset{\text{neu}}{=} |w| \cdot e^{i\psi}$$

Es folgt

$$z \cdot w = |z| \cdot e^{i\varphi} \cdot |w| \cdot e^{i\psi}$$

$$= |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$$

$$= |z| \cdot |w| \cdot \left( \cos(\varphi+\psi) + i \sin(\varphi+\psi) \right)$$

Regel für Exponential-funktion

Bsp zu de Moivre

Es wird

$$\cos(x)^3 = \left( \frac{1}{2} \left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \right)^3$$

$$= \frac{1}{8} \Big( \left(e^{ix}\right)^3 + 3 \left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3 e^{ix} \cdot \left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3 \Big)$$

$$= \dots$$

$$\ldots = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos(3x) + 3 \cdot 2 \cdot \cos(x)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

Bsp zu de Moivre

Wir leiten einmal den Sinus ab unter Verwendung von de Moivre: ...

$$\ldots \quad \frac{d}{dx}\sin(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)$$

Ketten-regel

$$\frac{1}{2i}\left(e^{ix}\cdot i - e^{-ix}\cdot(-i)\right)$$

$$= \frac{1}{2\cancel{i}}\left(e^{ix}\cdot\cancel{i} + e^{-ix}\cdot\cancel{i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x)$$

Bsp zum Cosinus hyperbolicus

Es ist $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \ldots$

$$\dots \overset{\text{Def}}{=} \frac{d}{dx} \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$\overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$= \sinh(x)$$

Bsp. zu $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$

Es ist

$$\cosh(x) \cdot \sinh(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^x\right)^2 - \left(e^{-x}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}\sinh(2x)$$