Bsp zum Ableiten von Potenzreihen

Die geometrische Reihe liefert:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$

Wir brauchen es hier nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Gesucht sei eine Funktion $f : \,]-1, +1[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, für welche $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ ist.

Ansatz :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit noch unbekannten $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \geq 0$.

Gefordert ist nun :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$\overset{!}{\Vert}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, k \cdot x^{k-1} \underset{\text{verschiebung}}{\overset{\text{Index-}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) \, x^k$$

Also ist $a_0 \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar.

Ferner muß

$$a_{k+1} \cdot (k+1) = 1$$

sein für $k \geq 0$, also $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

Mit anderen Worten, es muß

$$a_k = \frac{1}{k}$$

sein für $k \geq 1$.

20.05.2017

Resultat:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Da a_0 beliebig wählbar ist, setzen wir $a_0 := 0$.

Also: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$.

Ist das eine Funktion auf $]-1, +1[$?

Dazu sollte der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ≥ 1 sein.

Quotientenfolge: Es wird

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}\right|$$

$$= \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{k}+1} \longrightarrow 1$$

für $k \to \infty$.

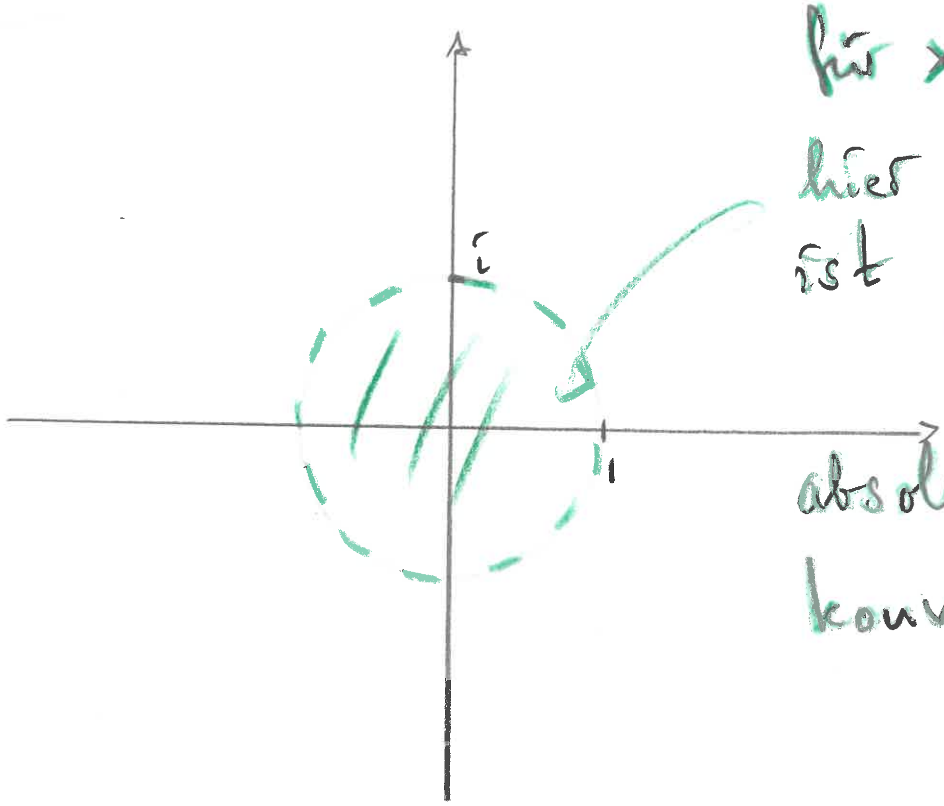
Die Quotientenfolge konvergiert also.

20.05.2019

Also ergibt sich der Konvergenzradius zu

$$\rho = \left(\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)^{-1}$$

$$= 1^{-1} = 1$$



für x von hier ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ absolut konvergent

Insbesondere ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = f(x)$$

konvergent auf $]-1, +1[\subseteq \mathbb{R}$.

Somit ist

$$f :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$x \longmapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

eine Funktion, die

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

auf $]-1, +1[$ erfüllt.