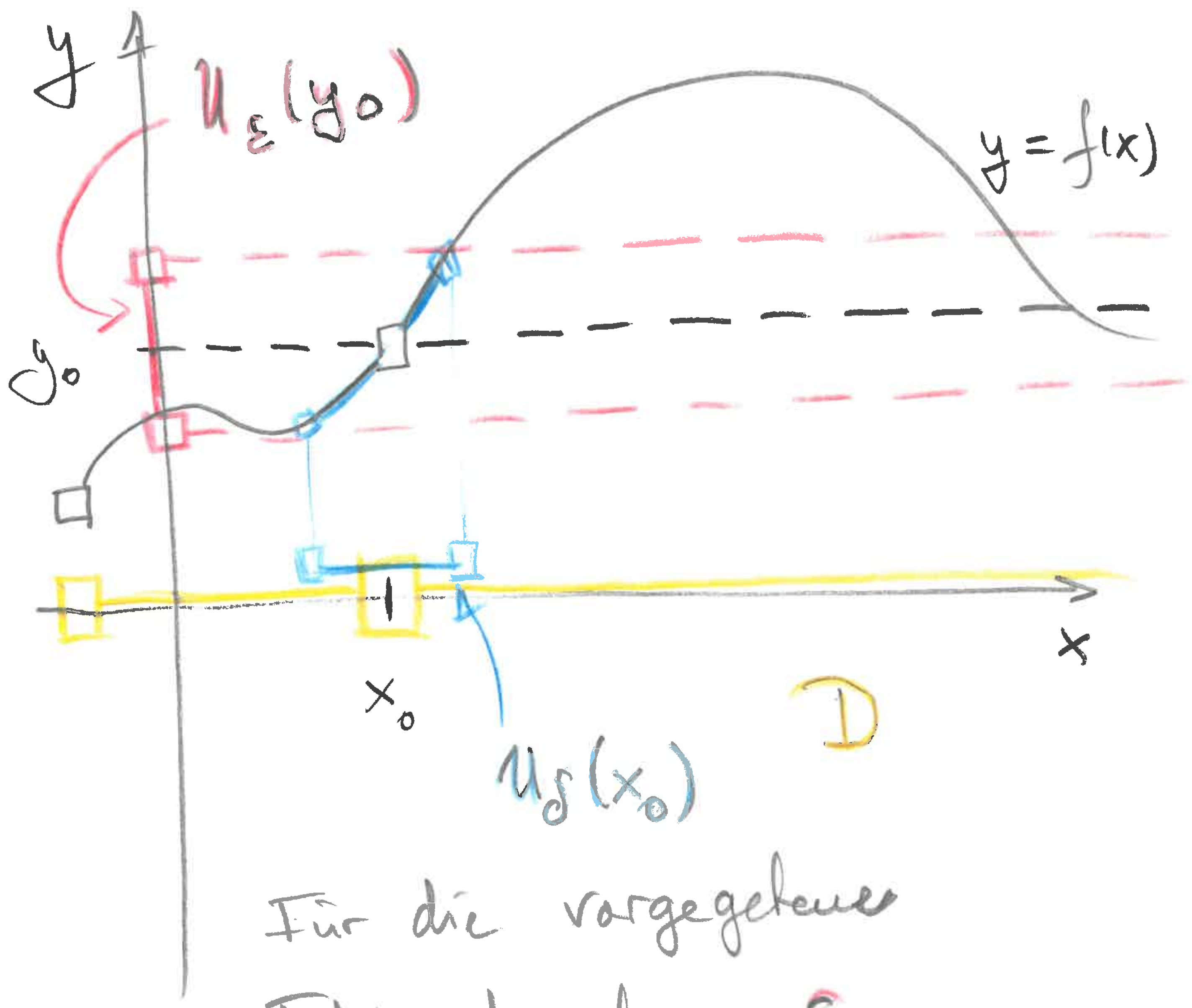
Bem $D \subseteq \mathbb{R}$

$f: D \to \mathbb{R}$ Funktion

$x_0 \in \overline{D}$, d.h. x_0 hängt an D



Für die vorgegebene Fehlerschranke ε wurde ein δ gefunden mit $f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(y_0)$

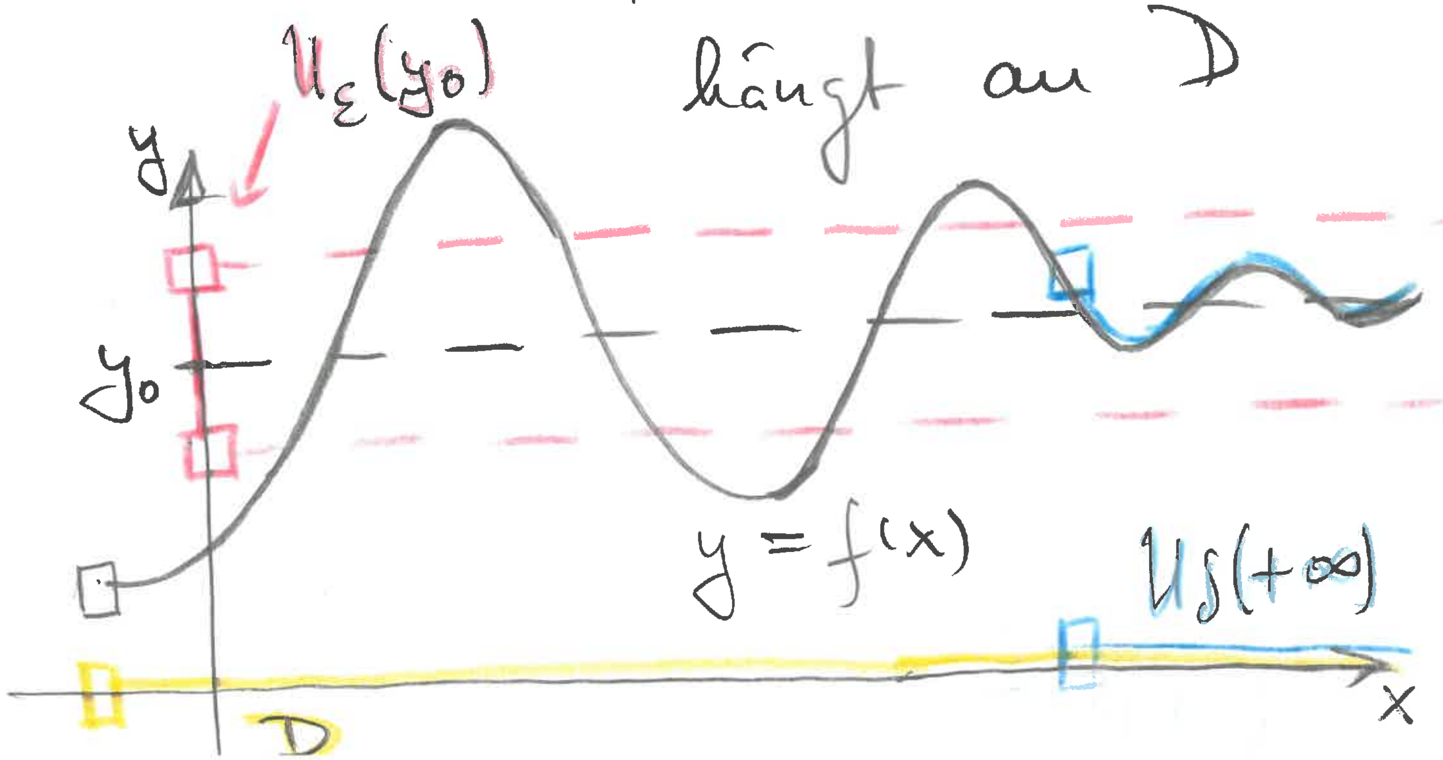
Für jede noch so kleine Fehlerschranke $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ finden wir ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ so, daß das funktioniert

Also: $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

<u>Bem</u> $D \subseteq \mathbb{R}$

$f : D \to \mathbb{R}$ Funktion

$+\infty \in \overline{D}$, d.h. $+\infty$ hängt an D



Für die vorgegebene Fehlerschranke ε wurde ein δ gefunden mit

$$f\left(U_\delta(x_0) \cap D\right) \subseteq U_\varepsilon(y_0)$$

Für jede noch so kleine Fehlerschranke $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ finden wir ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ so, daß das funktioniert.

Also: $y_0 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

22.4.20-7

<u>Bsp</u> $D := \mathbb{R}_{>0}$

$+\infty \in \overline{D}$

$f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Wir wollen unter Verwendung von ε und δ nachweisen, daß $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ist.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben.

Wir suchen dazu ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(U_\delta(+\infty) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(0)$, d.h. mit $U_\delta(+\infty) \cap D \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(0))$

Dazu berechnen wir $f^{-1}(U_\varepsilon(0))$:

22.4.20
-8

$$x \in f^{-1}(U_\varepsilon(0))$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \in \left]0-\varepsilon, 0+\varepsilon\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{x}} < +\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} < \varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Also ist $f^{-1}(U_\varepsilon(0)) = U_{\frac{1}{\varepsilon^2}}(+\infty)$

Mit $\delta := \frac{1}{\varepsilon^2}$ wird also

$$U_\delta(+\infty) \underset{\text{(sogar } =)}{\subseteq} f^{-1}(U_\varepsilon(0))$$

22.4.20
– 9

(Wir hätten auch $\delta := \frac{1}{\varepsilon^2} + 53$ wählen können, wenn wir gewollt hätten. Auch dann wäre $U_\delta(+\infty) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(0))$.

Die Lösung für δ ist also existent, aber bei weitem nicht eindeutig.)