Bsp zum Logarithmus

Es ist $e \approx 2{,}718$

Es ist $e < 5 < e^2$.

Also ist

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{\ln(e)} < \ln(5) < \underset{\substack{\| \\ 2}}{\ln(e^2)}$$

Tatsächlich ist $\ln(5) \approx 1{,}6094$

Bsp zu Logarithmenregeln

Wir wollen $\frac{d}{dx} \ln(x \cdot e^x)$ berechnen.

1. Weg. Ohne Logarithmenregeln.

$$\frac{d}{dx} \ln(x \cdot e^x) \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Ketten-}}{=}} \frac{1}{x \cdot e^x} \cdot (x \cdot e^x)'$$

$$= \ldots$$

$$\ldots \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Produkt-}}{=}} \frac{1}{x \cdot e^x} \cdot \left(e^x + x \cdot e^x \right)$$

$$= \frac{1}{x} + 1$$

2. Weg. Mit Logarithmenregeln.

$$\frac{d}{dx} \ln(x \cdot e^x)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\ln(x) + \ln(e^x) \right)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\ln(x) + x \right)$$

$$= \frac{1}{x} + 1 .$$

<u>Bsp</u> zu allgemeinen Potenzen

Es wird $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2^{x+1}}$

$\overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)\cdot 2^{x+1}}$

$= 0,$

da $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x+1} = +\infty.$

Vgl. Hausaufgabe 67 (c).

<u>Bsp</u> zu allgemeinen Potenzen

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$, sei $x \in \mathbb{R}$.

Es wird $a^{-x} \cdot a^{x}$

$= a^{-x+x} = a^{0} = e^{\ln(a)\cdot 0}$

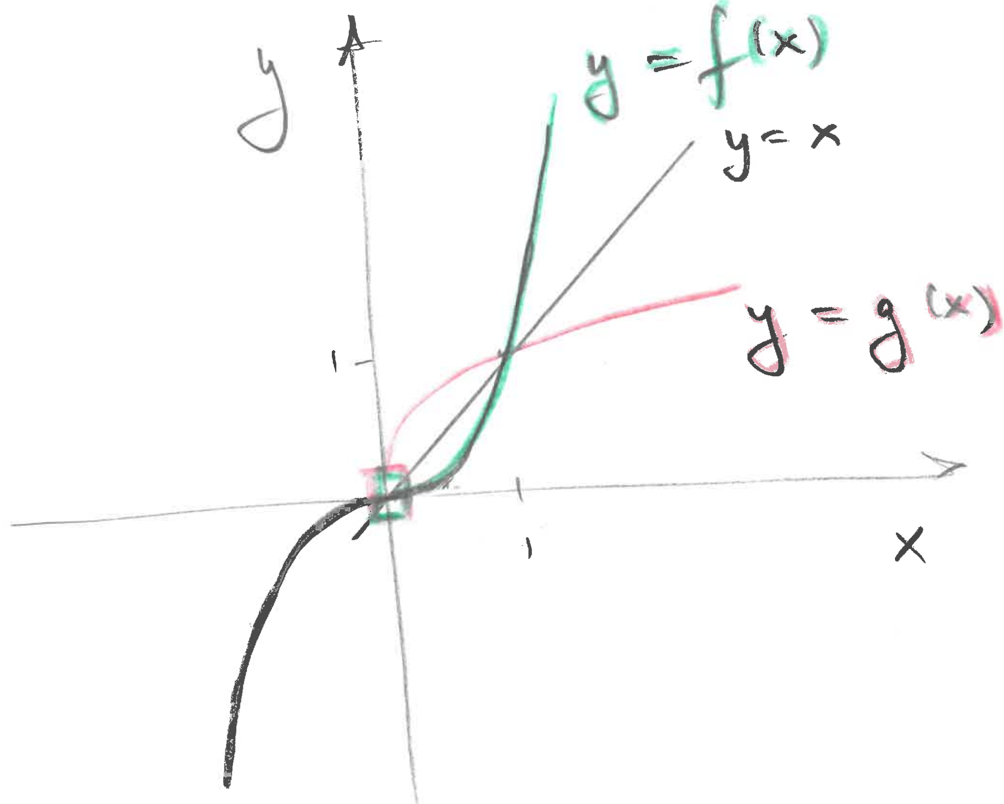
$= e^{0} = 1$, also $a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$.

Bsp. zur Ableitung von Umkehrfunktionen.

Sei $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^3$.

Sei $g: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^{1/3}$

dazu die Umkehrfunktion



Mit der Einschränkung auf $\mathbb{R}_{>0}$

haben wir erreicht, daß $f'(x) \neq 0$ ...

... ist für alle x aus dem Definitionsbereich. Hätten wir das nicht beachtet, hätten wir uns eine vertikale Tangente von $g(x)$ bei $x = 0$ eingehandelt.

Es ist $f'(x) = 3x^2$.

Also ist

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \left(x^{1/3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}},$$

wie wir auf andere Weise schon wußten.