Bsp zum Ableiten von Umkehrfunktionen

Es ist

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) := \sinh(x)$$

bijektiv, mit $f'(x) = \cosh(x)$

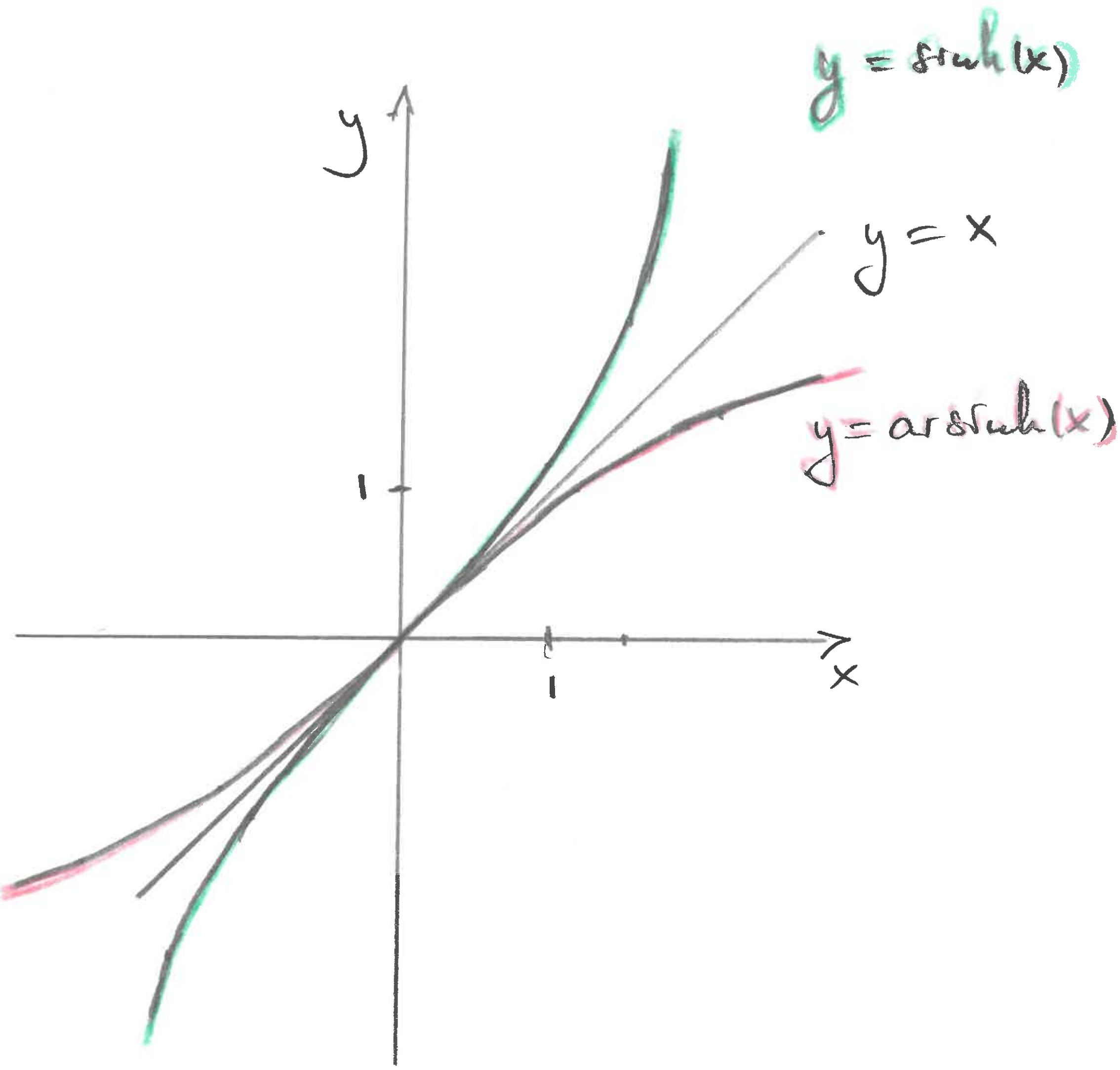
$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Sei

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(x) =: \operatorname{arsinh}(x)$$

ihre Umkehrfunktion, genannt Area sinus hyperbolicus.



Es ist $f'(x) = \cosh(x)$.

Es ist $-\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2 = 1$

Also ist $\cosh(x) = + \sqrt{1 + \sinh(x)^2}$

da ja $\cosh(x) > 0$

22.05.2018

Es wird

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh}(x)$$

$$= g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh(g(x))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh(\operatorname{arsinh}(x))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

22.05.20-9

Das geht auch auf einen anderen Weg zu berechnen:

Wir berechnen die Umkehrfunktion zu $\sinh(x)$:

$$y = \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = e^{2x} - 2y\,e^{x} - 1$$

Wir lösen

$$0 = t^{2} - 2yt - 1 \, :$$

$$t = y \pm \sqrt{y^{2} - (-1)}$$

Bei uns ist $t = e^x > 0$.

Also müssen wir das Vorzeichen "$+$" verwenden:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

Mithin

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

$$= g(y)$$

Also:

$$\operatorname{arsinh}(x) = g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Somit wird: 22.05.20-11

$$g'(x) \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Ketten-}}{=}} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$\underset{\text{regel}}{\overset{\text{Ketten-}}{=}} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Somit hat unser alternativer Weg dasselbe geliefert wie unser erster Weg, bei dem wir die Umkehrfunktion nur als solche kannten, ohne sie berechnet zu haben.