Bsp zu Untersummen,
Obersummen,
Integral

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R} :$
$x \mapsto f(x) = x^2$

Sei $n \geq 1$.
Sei $(x_0, \ldots, x_n) = \left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$
eine Unterteilung des Intervalls $[0,1]$. Also $x_j = \frac{j}{n}$.

Es wird

$$\inf\left(\{ f(x) : x \in [x_j, x_{j+1}] \}\right)$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \inf\left(\left\{ x^2 : x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]\right\}\right)$$

$$= \min\left(\left\{ x^2 : x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]\right\}\right)$$

inf = min, falls min existiert

$$= \frac{j^2}{n^2}$$

Es wird

$$\sup\left(\left\{ f(x) : x \in [x_j, x_{j+1}]\right\}\right)$$

$$= \sup\left(\left\{ x^2 : x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]\right\}\right)$$

$$= \max\left(\left\{ x^2 : x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]\right\}\right) = \ldots$$

sup = max, falls max existiert

$$\ldots = \left(\frac{j+1}{n}\right)^2$$

Also:

$$\mathrm{Unter}(f, \underline{x})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) \cdot \frac{j^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$\overset{\text{Induktion}}{=} \frac{1}{n^3} \, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{IA}: \sum_{j=1}^{0} j^2 = 0 = \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6}$$

$$\text{IS}: \sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) + (n+1)^2 \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6\right) = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right)$$

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right)$$

$$\mathrm{Ober}(f, \underline{x})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} \right) \cdot \frac{(j+1)^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} (j+1)^2$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \left(\frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3} (n+1)^2$$

Es geht $\mathrm{Unter}(f, \underline{x})$ für

$n \to \infty$ gegen $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

Es geht $\mathrm{Ober}(f, \underline{x})$ für

$n \to \infty$ gegen $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Somit ist

$$\frac{1}{3} \leq \sup\{\text{Unter}(f, \underline{x}) : x \in \mathcal{U}([0,1])\}$$

$$\leq \inf\{\text{Ober}(f, \underline{x}) : x \in \mathcal{U}([0,1])\}$$

$$\leq \frac{1}{3}$$

Also ist $f(x) = x^3$ auf $[0,1]$ integrierbar, und es wird

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Dies direkt nach Definition auszurechnen, wie gerade geschehen, ist mühseliger als es mittels Stammfunktionen auszurechnen. Letzteres Verfahren werden wir noch kennenlernen. Praktischen Nutzen haben Ober- und Untersummen für Abschätzungen von Integralen, weniger für ...

22.05.2017

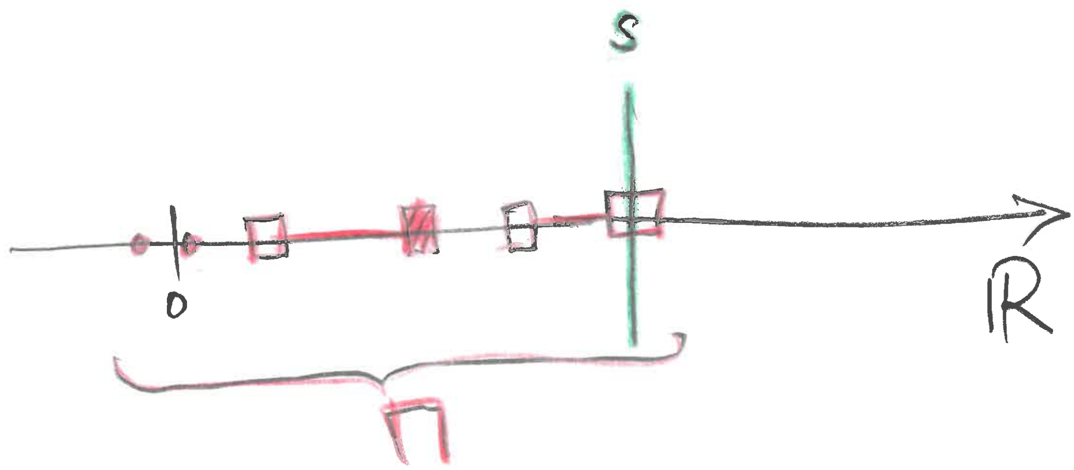
... deren Berechnung.

Bsp zum Begriff Supremum.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

Sei $s := \sup(M)$.

Es ist also s die minimale obere Schranke von M



Wir wollen zeigen, daß es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x \in \Pi$ gibt mit $x \in \,]s-\varepsilon, s]$.

Annahme, wir haben ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ vorliegen, für welches ein $x \in \Pi$ mit $x \in \,]s-\varepsilon, s]$ nicht existiert, d.h. für welches

$$\Pi \cap \,]s-\varepsilon, s] = \emptyset$$

ist.

Da s eine obere Schranke für Π ist, ist ...

22.05.2019

...

$$\Pi \cap \,]s, +\infty[\; = \emptyset$$

Insgesamt ist also

$$\emptyset = \Pi \cap \left( ]s-\varepsilon, s] \cup \,]s, +\infty[\right)$$

$$= \Pi \cap \,]s-\varepsilon, +\infty[$$

Also ist auch $s-\varepsilon$ eine obere Schranke für Π.

Da aber $s - \varepsilon < s$ ist, ist dies ein Widerspruch zur Minimalität von s.