Bem (1) Normalerweise dienen Grenzwerte dazu, einer Funktion an einer Stelle einen "Wert zu geben", wo sie keinen hat. z.B.: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Was man lesen kann als: "Bei $+\infty$ wäre 0 ein sinnvoller Wert für $\frac{1}{x}$."

(2) Man kann aber auch Stellen betrachten, an denen die Funktion bereits einen Wert hat, dort trotzdem den Grenzwert zu bilden versuchen und auf diese Weise feststellen, ob dort eine Sprungstelle vorliegt.

Man sagt, $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, falls $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und in $\mathbb{R}$ liegt.

24.04.20-2

Mit anderen Worten, falls f in x_0 konvergiert.

Dann ist

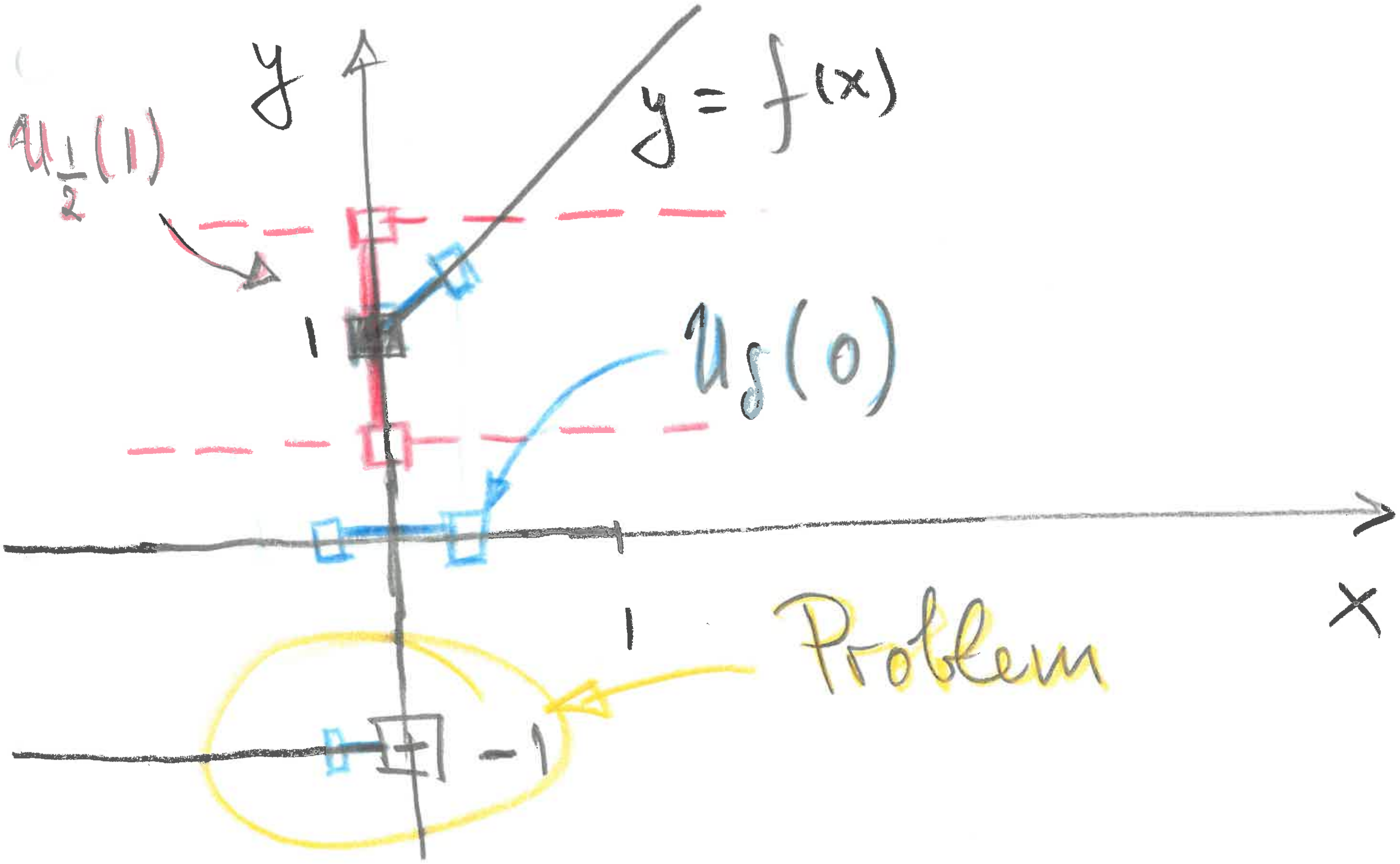
$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Bsp

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $x_0 = 0$.



Wäre f stetig in $x_0 = 0$,

dann gäbe es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$

mit $f(\mathcal{U}_\delta(0)) \subseteq \mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(1)$.

Aber egal, wie klein man

δ macht, links von $x_0 = 0$

wird man nicht im roten

Streifen landen. Also

$$f(\mathcal{U}_\delta(0)) \not\subseteq \mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(1).$$

Widerspruch.

So haben ε und δ also

"einen Sprung bei $x_0 = 0$

entdeckt", was die Stetigkeit verhindert.

<u>Bem</u>: Unstetige Funktionen muß man <u>künstlich</u> produzieren. Die in der Natur auftretenden Funktionen wie $x^3 + 2x - 1$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sin(x)$, $\cos(\sqrt{x})$, ... sind alle stetig (auf dem jeweils naheliegenden Def'bereich).

<u>Bem</u>: Anschaulich kann man sagen, $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, falls der Graph in x_0 keinen Sprung hat.

(Man kann auch anschaulich sagen, f ist stetig in x_0, falls bei einer kleinen Änderung des Arguments in der Nähe von x_0 sich auch der Funktionswert von f nur wenig ändert. Es verhält sich f wie eine "regelbare Maschine mit Regler x")

Bem Praktische Bedeutung

heißt die Stetigkeit einer Funktion f als Erlaubnis, f mit $\lim$ zu vertauschen.

Bsp

$$\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\pi + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \cos\left(\lim_{x \to +\infty} \pi + \frac{1}{x}\right)$$

cos stetig hier gebraucht

$$= \cos(\pi)$$

$$= -1$$