Folgengrenzwerte

verhalten sich ganz ähnlich wie Funktionsgrenzwerte.

Genauer gesagt, Folgen *sind* Funktionen, nur eben mit Definitionsbereich der Form $\mathbb{Z}_{\geq k} = \{k, k+1, k+2, \dots\}$

Und Folgengrenzwerte *sind* dann Funktionsgrenzwerte in diesem Spezialfall.

Schreibweise: für $f : \mathbb{Z}_{\geq k} \to \mathbb{R}$ schreiben wir oft $f_n := f(n)$

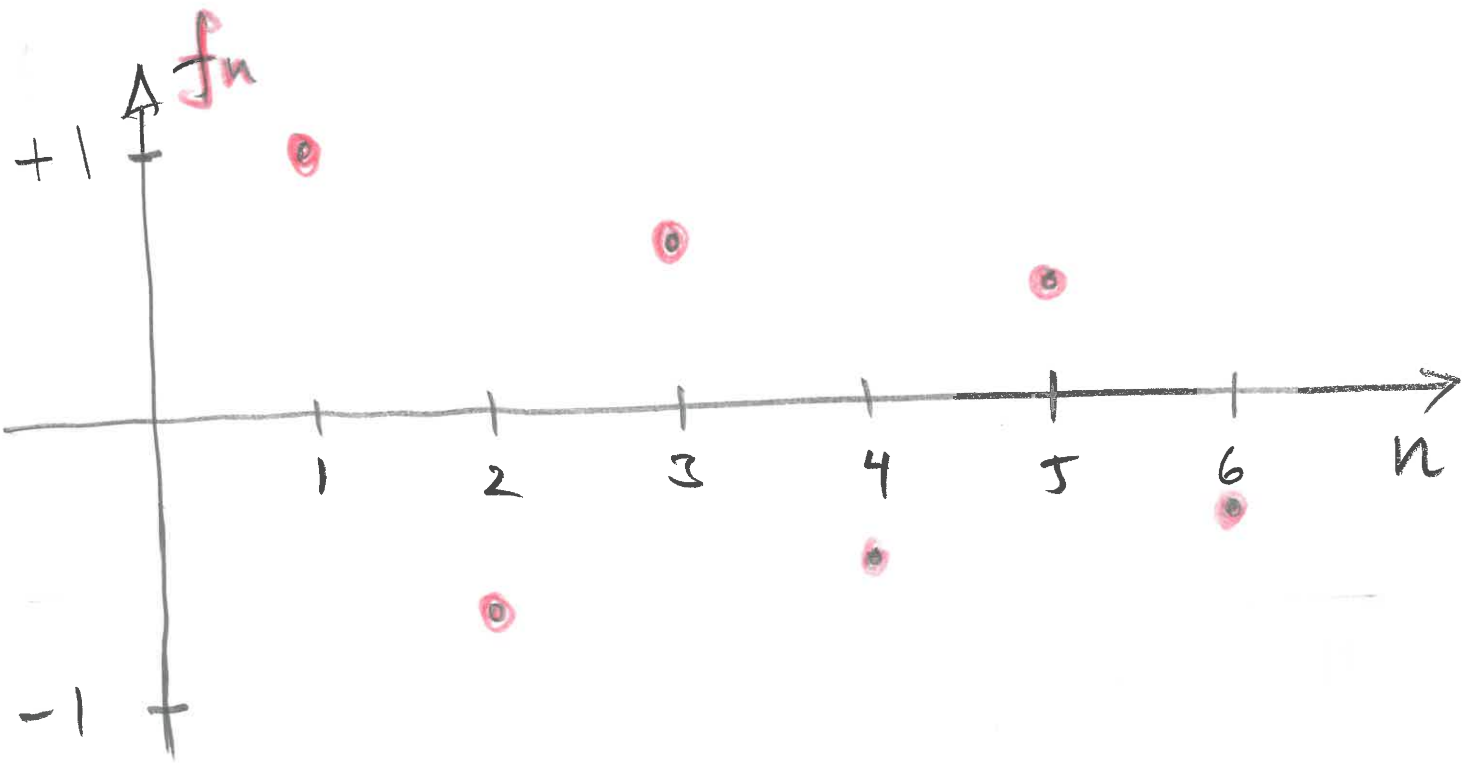
und $(f_n)_{n \geq k} := f$

24.04.20

Bsp Sei $(f_n)_{n\geq 1} = \left((-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Beim Faktor $(-1)^n$ war nun die Beschränkung auf $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ eine gute Idee — denn wir kennen $(-1)^x$ für $x \in \mathbb{R}$ i.a. nicht.



<u>Bem</u>: Im Skript werden (ohne Begründung) ein paar Standard-Grenzwerte zur Verfügung gestellt, die man in der Praxis verwenden darf.

<u>Bsp</u>:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{5}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(5^{1/n}\right)^{1/2}$$

$$\overset{\substack{x \mapsto x^{1/2} \\ \text{stetig}}}{=} \left(\lim 5^{1/n}\right)^{1/2}$$

$$\overset{\text{Skript}}{=} \left(1\right)^{1/2} = 1$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

24.04.20 – 10

zeigt schön, was man darf und was man nicht darf:

aus Skript ohne Begründung

Richtig: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\ldots$

Falsch: $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n = 1}$

und deshalb gestrichen

24.04.20 – 11

(3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3-n^2} = \lim_{n\to\infty} (n^3+n^2)^{\frac{1}{3}} - (n^3-n^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((n^3+n^2)^{\frac{1}{3}} - (n^3-n^2)^{\frac{1}{3}}\right) \frac{(n^3+n^2)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n^2)^{\frac{1}{3}}(n^3-n^2)^{\frac{1}{3}} + (n^3-n^2)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n^2)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n^2)^{\frac{1}{3}}(n^3-n^2)^{\frac{1}{3}} + (n^3-n^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Trick

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+n^2)^{\frac{3}{3}} - (n^3-n^2)^{\frac{3}{3}}}{(n^3+n^2)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n^2)^{\frac{1}{3}}(n^3-n^2)^{\frac{1}{3}} + (n^3-n^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n^3+n^2)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n^2)^{\frac{1}{3}}(n^3-n^2)^{\frac{1}{3}} + (n^3-n^2)^{\frac{2}{3}}}$$

n^2 kürzen

$= \ldots$

$$\ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+n^{-1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+n^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-n^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1-n^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Grenzwert-regeln

$$= \frac{2}{1 + 1\cdot 1 + 1}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(Um auch einmal ein etwas trickreicheres Beispiel gezeigt zu haben.)

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \binom{n}{3}$

24.04.20
– 13

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$