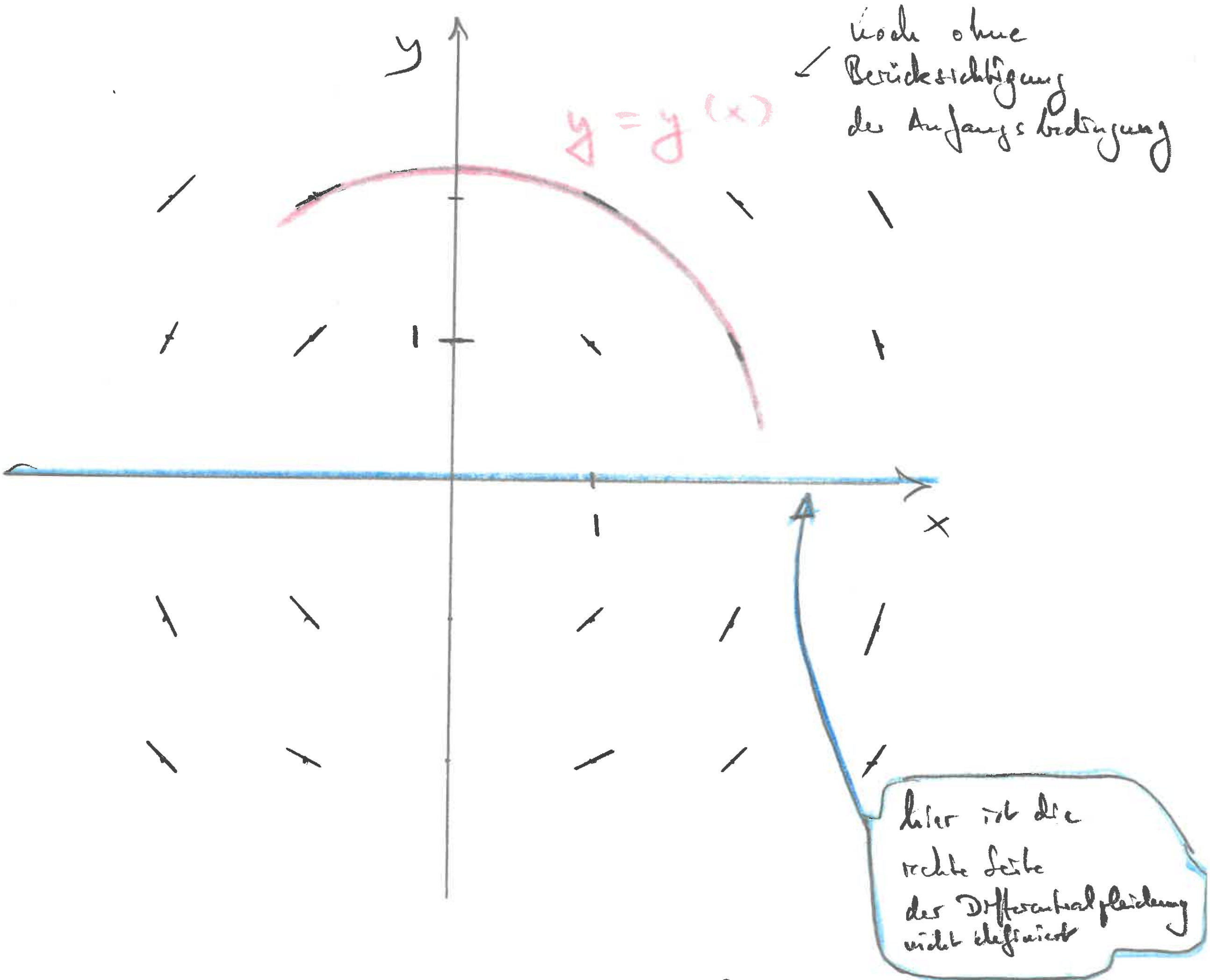
<u>Bsp</u> für Richtungsfeld und für separierbare Differentialgleichungen.

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y(1) = -2$$

Skizzieren wir das Richtungsfeld.



Man vermutet, daß die Graphen der Lösungen Kreise sind, oder besser, Teile von Kreisen

Lösen wir die Differentialgleichung.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$y y' = -x$$

$$\int y y' dx = \int -x \, dx$$

$$\int y y' dx = \int y \, dy = \left[\frac{1}{2} y^2\right]$$

$$\int -x \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Also $y^2 + x^2 = 2c$.

Dies zeigt: $c > 0$ ist nötig.

Es wird

$$y = y(x) = \sqrt{2c - x^2}$$

oder

$$y = y(x) = -\sqrt{2c - x^2}$$

Dies ist die Lösung unserer Differentialgleichung, bevor wir die Anfangsbedingung berücksichtigt haben.

In beiden Fällen ist der Graph ein Halbkreis um $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{2c}$.

Berücksichtigen wir die Anfangsbedingung. Es soll sein:

$$-2 \overset{!}{=} y(1) = -\sqrt{2c-1^2} \,,$$

nötig!

also $\quad 2 = \sqrt{2c-1} \,,$

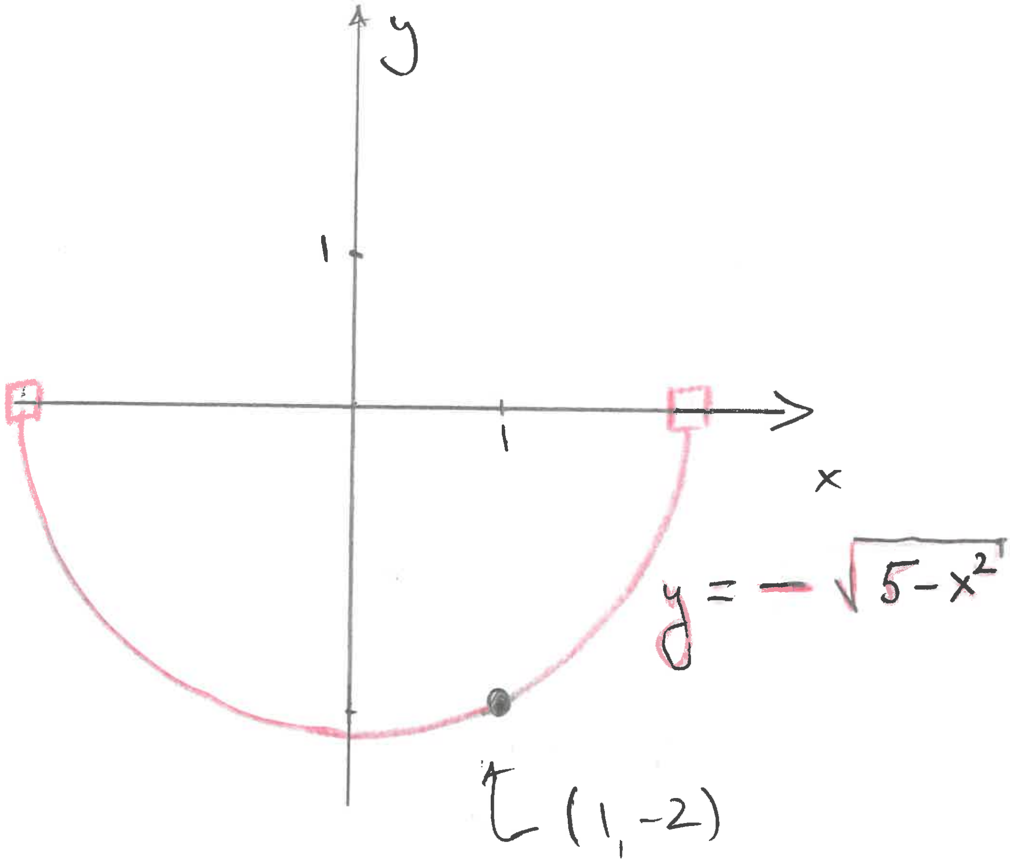
also $\quad 4 = 2c-1 \,,$

also $\quad c = \frac{5}{2} \,.$

Als Lösung erhalten wir

$$y = y(x) = -\sqrt{5-x^2} \,,$$

definiert auf $\left]-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\right[$.



Probe:

$$y = -\sqrt{5-x^2}$$

$$y' = -\frac{1}{2}(5-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= (5-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$= -\frac{x}{y}$$

$$y(1) = -\sqrt{5-1^2} = -2.$$

Wie gewünscht.