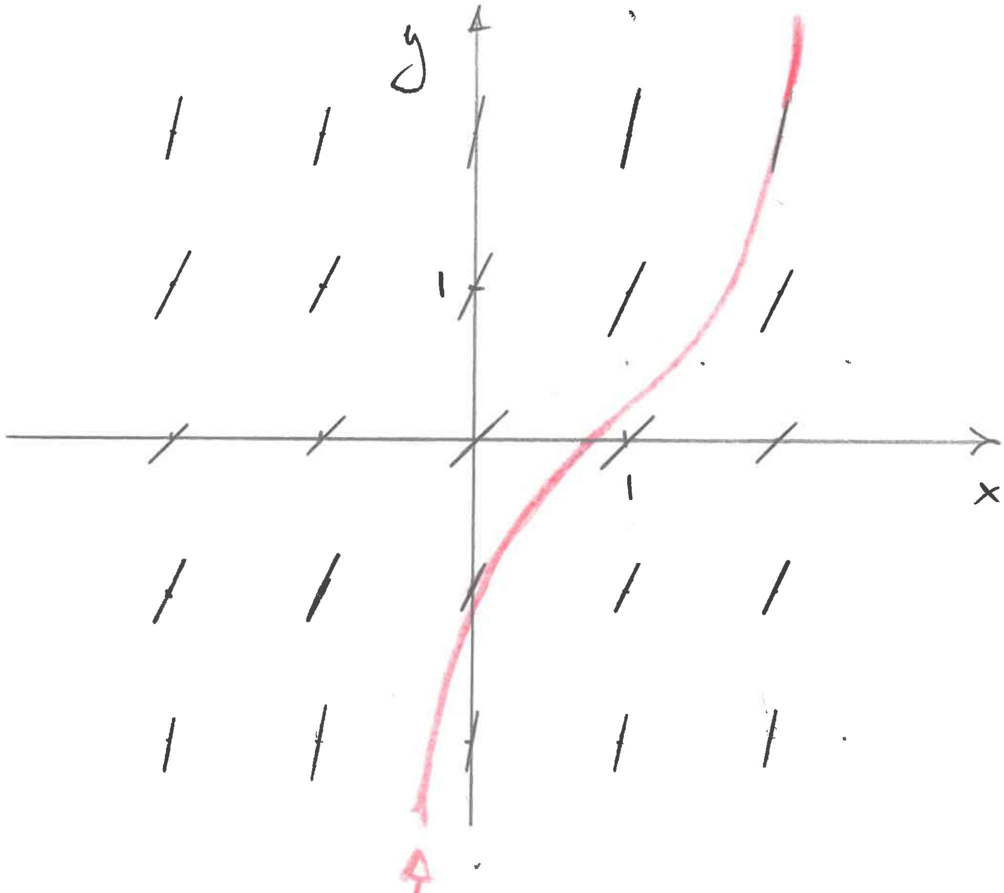
Bsp für Richtungsfeld
und für separierbare Differentialgleichungen

$$\underbrace{y' = 1 + y^2}_{\text{Differentialgleichung}} \quad , \quad \underbrace{y(1) = 1}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

Skizzieren wir das Richtungsfeld.



Versuch der Freihandinterpolation des Graphen einer Lösung

Lösen wir die Differentialgleichung:

$$y' = 1 + y^2$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

$$\int \frac{y'}{1+y^2}\, dx = \int 1\, dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy \qquad\qquad [x]$$

$$[\arctan(y)]$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(y) = x + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad y = \tan(x+c),$$

definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{ \pi k - c : k \in \mathbb{Z} \}$

Berücksichtigen wir die Anfangsbedingung:

$$1 \stackrel{!}{=} y(1) = \tan(1+c)$$

$$\Rightarrow \arctan(1) = 1 + c$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{4} - 1$$

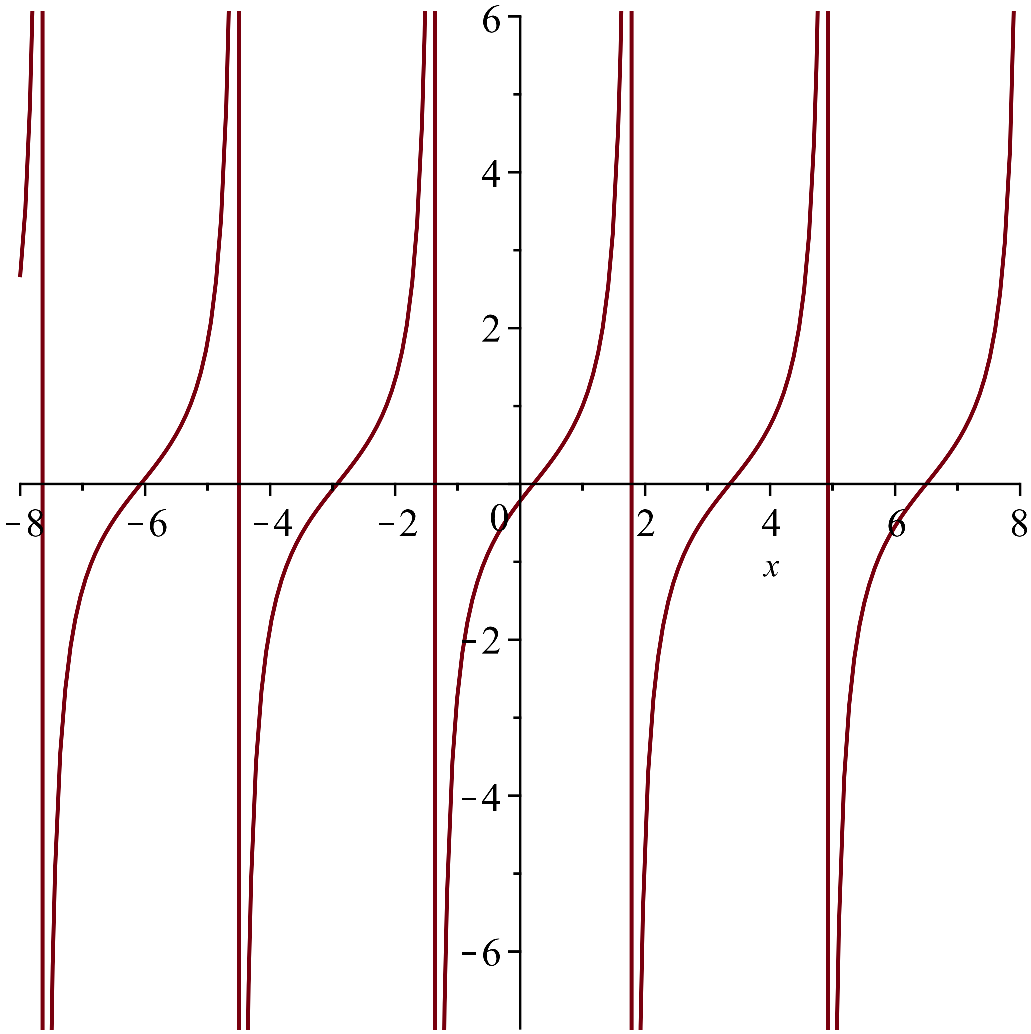
Als Lösung erhalten wir:

$$y = y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 1\right),$$

definiert auf der offenen Teilmenge

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \pi k - \frac{\pi}{4} + 1 \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

von $\mathbb{R}$.


6
4
2
−2
−4
−6
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
x

24.06.20 – 9

In dieser Graphik

bestand das Computeralgebrasystem

Maple auf der Ausgabe

der vertikalen Asymptoten.

Diese sind für das Verständnis

nützlich. Sie sind aber

trotzdem <u>nicht</u> Bestandteil

des Graphen $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$.

Vielmehr liegt bei jeder

vertikalen Asymptote eine

Lücke des Definitionsbereichs vor.

Probe:

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$$

$$y' = \left(1 + \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 1\right)^2\right) \cdot 1$$

$$= 1 + y^2$$

$$y(1) = \tan\left(1 + \frac{\pi}{4} - 1\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Wie gewünscht.