Bsp für separierbare Differentialgleichungen

$$\underbrace{y' = y^2 e^x}_{\text{Differentialgleichung}}, \quad \underbrace{y(0) = 0}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

Wir lösen die Differentialgleichung.

$$y' = y^2 e^x$$

$$y^{-2} y' = e^x$$

$$\int y^{-2} y' \, dx = \int e^x \, dx$$

$$\int y^{-2} y' \, dx = \int y^{-2} \, dy = \left[-y^{-1} \right]$$

$$\int e^x \, dx = \left[e^x \right]$$

Also ist

$$-y^{-1} = e^x + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Somit wird

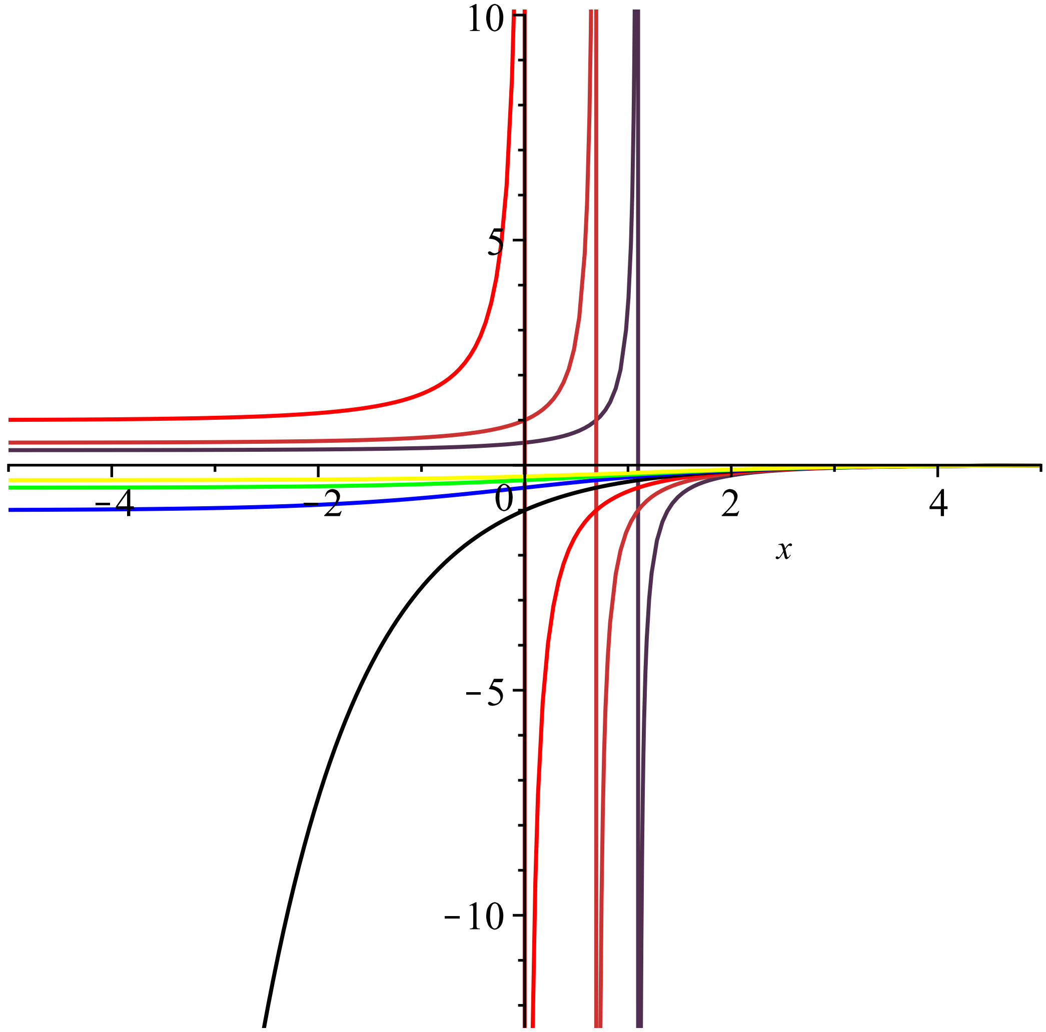
$$y = -\frac{1}{e^x + c},$$

definiert auf $\mathbb{R}$, falls $c \geq 0$,

auf $\mathbb{R} \setminus \{\ln(-c)\}$,

falls $c < 0$.

Wir lassen uns von Maple für $c \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ den jeweiligen Graphen plotten.



10
5
−5
−10
−4
−2
0
2
4
x

24.06.20 – 13

Wieder besteht Maple auf den vertikalen Asymptoten, die aber nicht zum Graphen gehören.

Eine solche graphische Darstellung nennt man auch "Kurvenschar".

Die Farbgebung ist

$c = -3$: lila (fast schwarz)

$c = -2$: orange (eher braun)

$c = -1$: rot

$c = 0$: schwarz

$c = 1$: blau

$c = 2$: grün

$c = 3$: gelb

Kümmern wir uns nun um die Anfangsbedingung:

$$0 \stackrel{!}{=} y(0) = -\frac{1}{1+C}$$

Das ist nicht erfüllbar.

Was ist hier los?:

Eine spezielle Lösung wird von unserem Verfahren "übersehen": $y = y(x) = 0$ löst $y' = y^2 e^x$, da sich dann $0 = 0$ ergibt. Und diese spezielle ...

... Lösung hat auch noch

den gewünschten Anfangswert:

$$y(0) = 0$$

(Das ist in unserer Vorversion der "Grenzfall $c \to +\infty$")

<u>Probe</u>: Machen wir einmal

die Probe, ob die Differential-

gleichung erfüllt ist

für $y = y(x) = -\dfrac{1}{e^x + c}$.

Es wird mit Kettenregel:

$$y' = \frac{1}{(e^x+c)^2} \cdot e^x$$

$$y^2 \cdot e^x = \left(-\frac{1}{e^x+c}\right)^2 \cdot e^x$$

Wie gewünscht.