Bsp für Ähnlichkeits - Differentialgleichung

Man löse $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$

zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$.

Substitution $y(x) = u(x) \cdot x$,

kurz $y = u \cdot x$, führt auf

$$u'x + u = y' = e^u + u$$

$$\Rightarrow \quad u' = e^u \cdot \frac{1}{x}$$

Separierbar!

$$e^{-u} u' = \frac{1}{x}.$$

Wir integrieren auf beiden Seiten:

$$\int e^{-u} u' \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int e^{-u} u' \, dx = \int e^{-u} \, du = \left[-e^{-u} \right]$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln(|x|) \right]$$

Also $\quad -e^{-u} = \ln(|x|) + c$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Auflösen nach u:

$$e^{-u} = -\ln(|x|) - c$$

$$u = -\ln\left(-\ln(|x|) - c \right)$$

Rücksubstitution:

$$y = u \cdot x = -x \cdot \ln\left(-\ln(|x|) - c\right)$$

Anfangsbedingung:

$$2 \overset{!}{=} y(1) = -1 \cdot \ln(-\ln(|1|) - c)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-2} = -c$$

Das gibt die Lösung

$$y = y(x) = -x \ln\left(e^{-2} - \ln(|x|)\right).$$

Wir sollten noch den Definitionsbereich D klären: Es sollte $e^{-2} - \ln(|x|) > 0$ sein, also $e^{-2} > \ln(|x|)$, also $e^{e^{-2}} > |x| > 0$, also ist $D := \left]-e^{e^{-2}}, +e^{e^{-2}}\right[\setminus \{0\}$ möglich.

Probe:

$$y' = -1 \cdot \ln\left(e^{-2} - \ln(|x|)\right) - x \cdot \frac{1}{e^{-2} - \ln(|x|)} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\ln\left(e^{-2} - \ln(|x|)\right) + \frac{1}{e^{-2} - \ln(|x|)}$$

$$e^{y/x} + \frac{y}{x} = e^{-\ln(e^{-2} - \ln(|x|))} - \ln\left(e^{-2} - \ln(|x|)\right)$$

$$= \frac{1}{e^{-2} - \ln(|x|)} - \ln\left(e^{-2} - \ln(|x|)\right)$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

Ferner wird

$$y(1) = -1 \cdot \ln\left(e^{-2} - \ln(|1|)\right)$$

$$= -\ln(e^{-2})$$

$$= -(-2) = 2.$$

Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.