Bsp für Ähnlichkeits-Differentialgleichung

Man löse

$$y' = \frac{y}{x} + 2$$

zur Anfangsbedingung $y(3) = t$

für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Substitution $y = u \cdot x$ gibt

$$u' \cdot x + u = y' = u + 2$$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \quad u = 2 \ln(|x|) + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad y = u \cdot x = \left(2 \ln(|x|) + c\right) \cdot x$$

Anfangsbedingung:

$$t = y(3) = \left(2 \ln(3) + c\right) \cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t}{3} - 2 \ln(3) = c$$

Wir erhalten so die Lösung

$$y = y(x) = \left(2 \ln(|x|) - 2 \ln(3) + \frac{t}{3}\right) x$$

$$= \left(2 \ln\left(\frac{|x|}{3}\right) + \frac{t}{3}\right) x$$

Diese Lösung ist auf

$D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert.

<u>Probe</u> :

Es wird

$$y' = 2\ln\left(\frac{|x|}{3} + \frac{t}{3}\right) \cdot 1$$

$$+ \frac{2}{x} \cdot x$$

$$= \frac{y}{x} + 2 .$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

Ferner wird

$$y(3) = \left(2\ln\left(\frac{3}{3}\right) + \frac{t}{3}\right) \cdot 3 = t .$$

Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.