Bsp für lineare Differentialgleichung

Zu lösen sei

$$y' = 3y + e^x$$

mit dem Anfangswert

$$y(0) = 0$$

Wir lösen die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:

$$y' = 3y$$

Diese ist separierbar.

Also

$$\frac{y'}{y} = 3$$

Also

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int 3\,dx$$

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = [\ln|y|]$$

$$\int 3\,dx = [3x]$$

Also $\ln|y| = 3x + c$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Also $y = e^{3x} \cdot e^{c}$

oder $y = e^{3x} \cdot (-e^{c})$

oder, die konstante Lösung, $y = 0$.

26.06.20 –

II

Somit ist

$$y = e^{3x} \cdot d$$

für ein $d \in \mathbb{R}$.

Um nun die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung zu lösen, machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y = e^{3x} \cdot d(x)$$

Gelten soll dann:

$$y' \overset{!}{=} 3y + e^x$$

$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ e^{3x} \cdot d'(x) & 3e^{3x} \cdot d(x) + e^x \\ + 3e^{3x} \cdot d(x) & \end{array}$$

Also

$$e^{3x} \cdot d'(x) \stackrel{!}{=} e^{x}$$

$$d'(x) \stackrel{!}{=} e^{-2x}$$

$$d(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + h$$

für ein $h \in \mathbb{R}$.

Einsetzen:

$$y = e^{3x} \cdot d(x)$$

$$= e^{3x} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + h\right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{x} + h e^{3x}.$$

Die Anfangsbedingung sollte erfüllt sein:

$$0 = y(0) = -\frac{1}{2}e^0 + h \cdot e^{3 \cdot 0}$$

$$= -\frac{1}{2} + h$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

Wir haben die Lösung:

$$y = y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{3x}$$

Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

Probe:

$$y' = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{3}{2}e^{3x}$$

$$3y + e^{x} = -\frac{3}{2}e^{x} + \frac{3}{2}e^{x} + e^{x}$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

$$y(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + \frac{1}{2}e^{3\cdot 0} = 0$$

Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.

26.06.20-15

Bsp zu lineare Differentialgleichungen

Wir suchen eine Lösung von

$$y' = \tan(x) \cdot y + 1$$

zum Anfangswert $y(0) = 1$.

Homogene Differentialgleichung:

$$y' = \tan(x) \cdot y$$

$$\left[\ln(|y|)\right] = \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \tan(x)\,dx$$

$$= -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$= \left[-\ln(|\cos(x)|)\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{d}{\cos(x)}$$

Variation der Konstanten

für inhomogene Differentialgleichung:

$$y = \frac{d(x)}{\cos(x)} = d(x)\cos(x)^{-1}$$

$$y' = d'(x)\cos(x)^{-1} + d(x)\left(-\cos(x)^{-2}\right)\left(-\sin(x)\right)$$

$$\stackrel{!}{=} \tan(X)\cdot y + 1$$

$$= d(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad d'(x) \stackrel{!}{=} \cos(x)$$

$$\Rightarrow \quad d(x) = \sin(x) + h$$

$$\Rightarrow \quad y = \tan(x) + \frac{h}{\cos(x)}$$

Anfangsbedingung

$$1 = y(0) = h$$

Lösung:

$$y = y(x) = \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}$$

Definitionsbereich:

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Probe:

$$y' = 1 + \tan(x)^2 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

$$=$$

$$\tan(x) \cdot y + 1$$

$$= \tan(x)^2 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} + 1$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt.

$$y(0) = 1 + 0 + 0 = 1$$

Also ist die Anfangsbedingung erfüllt.