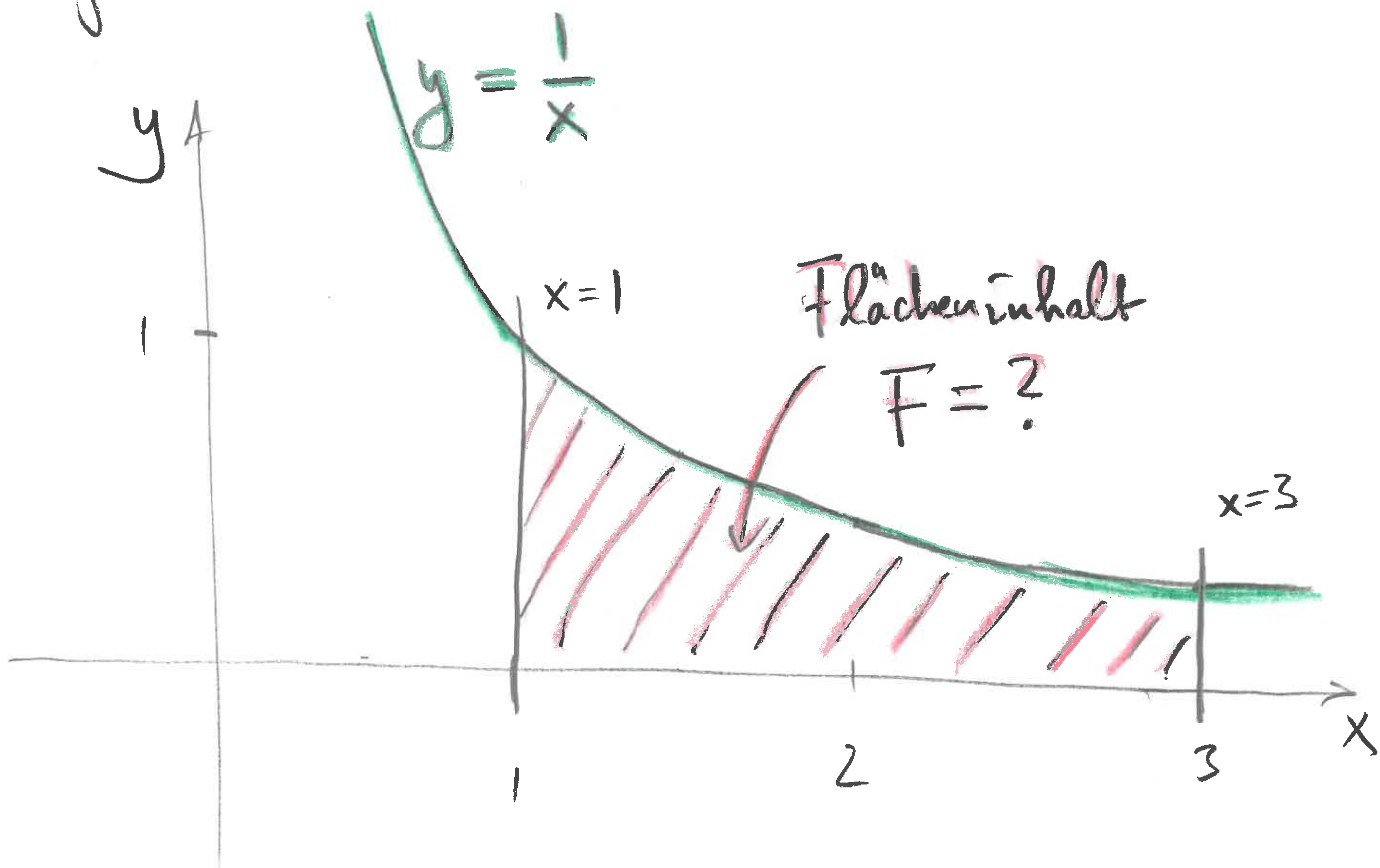
Bsp für Integrale und Flächeninhalt

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$

Wir sollen den Inhalt der Fläche berechnen, die vom Graphen von f, von der x-Achse und von den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ begrenzt wird.



Es wird

$$F = \int_1^3 \frac{1}{x} \, dx$$

Es ist zunächst

$$\int \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)],$$

da $\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln(x)$ ist.

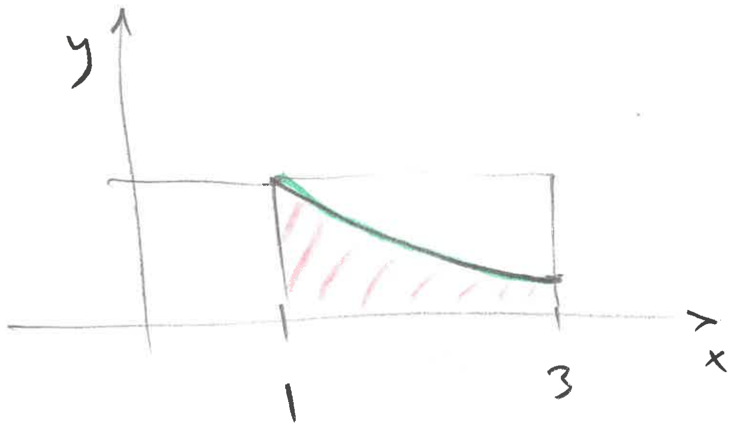
Damit wird

$$F = \int_1^3 \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_1^3$$

$$= \ln(3) - \ln(1)$$

$$= \ln(3) \quad (\approx 1{,}099)$$

Hier empfiehlt sich, falls möglich, eine Plausibilitätskontrolle:



Das Rechteck hat Flächeninhalt 2, also kann die rot schraffierte Fläche schon etwas mehr als halb so groß sein. Der Flächeninhalt $F = 1{,}099$ widerspricht jedenfalls der Zeichnung nicht.

Bsp zu Abschätzungen für Fakultäten

Wir erhielten für $n \geq 2$:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

Damit sollen wir nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

berechnen.

Es ist $(n!)^2 \leq \dfrac{(n+1)^{2(n+1)}}{e^{2n}}$.

Es ist $(2n)! \geq \dfrac{(2n)^{2n}}{e^{2n-1}}$

27.05.20-5

Also ist

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{e^{2n}} \cdot \frac{e^{2n-1}}{(2n)^{2n}}$$

$$\overset{\text{sortieren}}{=} e^{-1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{2^{2n}}$$

$$= e^{-1} \cdot \Big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e}\Big)^2 \cdot \Big(\underbrace{\frac{n+1}{2^n}}_{\to 0}\Big)^2$$

denn:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2^x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x \cdot \ln(2)} = 0$$

$$\longrightarrow \quad 0$$

Somit haben wir ein

Sandwich

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}_{\to 0} \leq \underbrace{e^{-1}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\cdot\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^2}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \qquad \Leftarrow$$

Es ist also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = +\infty.$$