27.05.20 – 11

Bsp für partielle Integration

Es ist zu berechnen:

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx = \;?$$

Zunächst berechnen wir die Stammfunktion, dh. das unbestimmte Integral:

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)}\,\underbrace{\cos(x)}_{g(x)}\,dx$$

$$= \Big[\underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)}\,\underbrace{\cos(x)}_{g(x)}\Big]$$

$$- \int \underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)}\,\underbrace{(-\sin(x))}_{g'(x)}\,dx = \ldots$$

27.05.20-12

$$\ldots = \left[-\cos(x)^2\right] - \int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

Es sieht so aus, als hätten wir im Kreis gerechnet. Wir können aber das entstandene Integral nach links bringen:

$$2\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \left[-\cos(x)^2\right]$$

Also

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(x)^2\right]$$

Es gibt alternativ noch einen anderen Lösungsweg:

27.05.20 - 12a

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}\,dx$$

$$= \Big[\underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} \Big]$$

$$- \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin(x)\cos(x)\,dx = \Big[\sin(x)^2\Big]$$

$$\Rightarrow \int \sin(x)\cos(x)\,dx = \Big[\tfrac{1}{2}\sin(x)^2\Big]$$

Kann das sein ?:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \overset{1.}{=} \Big[-\tfrac{1}{2}\cos(x)^2\Big]$$

$$\overset{2.}{=} \Big[\tfrac{1}{2}\sin(x)^2\Big]$$

27.05.20-13

Ja, das ist dasselbe:

$$\left[-\frac{1}{2}\cos(x)^2\right]$$

$$\overset{\text{Pythagoras}}{=} \left[-\frac{1}{2}\left(1-\sin(x)^2\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin(x)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin(x)^2\right]$$

Stammfunktionen sind nur bis auf die Addition einer Konstanten festgelegt, was die eckige Klammer signalisieren soll

27.05.20-14

Es wird nun das

zu berechnende Integral:

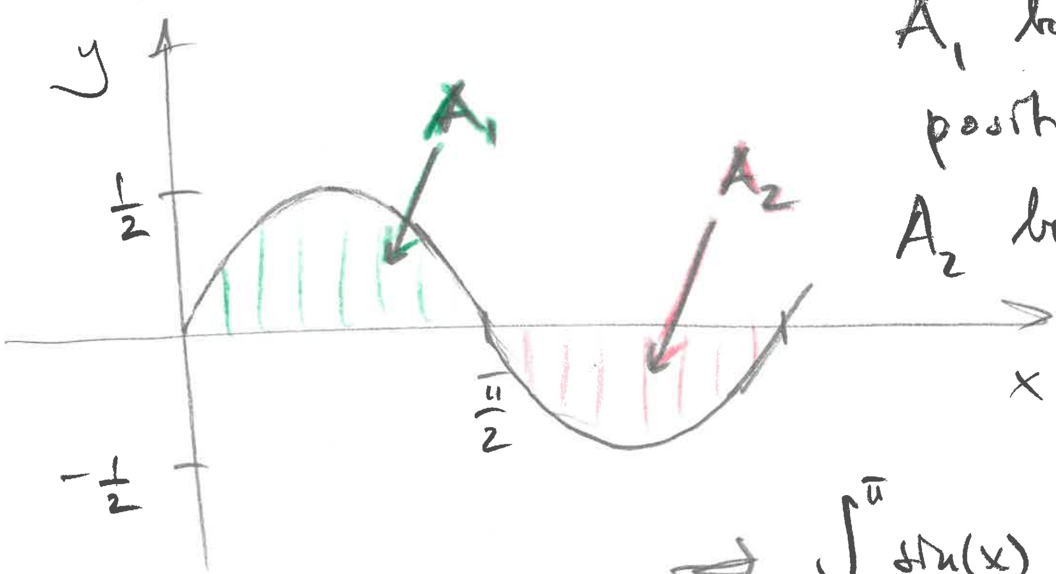
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \left[\frac{1}{2}\sin(x)^2\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\pi)^2 - \frac{1}{2}\sin(0)^2$$

$$= 0 - 0 = 0$$

Graphisch: $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$



A_1 bekommt positives Vorzeichen

A_2 bekommt negatives Vorzeichen

$$\rightarrow \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = 0$$

27.05.2015

Bsp für partielle Integration

$$\int_2^3 x \ln(x)\, dx = ?$$

$$\int \underbrace{x}_{f'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\, dx$$

$$= \Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f(x)} \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\Big] - \int \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2}x^2 \ln(x)\Big] - \tfrac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2}x^2 \ln(x)\Big] - \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}x^2\Big]$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2}x^2 \ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2\Big]$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$- \frac{1}{4} \cdot 2x$$

$$= x \ln(x) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x$$

$$= x \ln(x) \, ,$$ das paßt

Hätte man auch hier den Ansatz alternativ auch andersherum wählen können? Versuchen wir es!

$$\int x \ln(x) \, dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \, dx = \ldots$$

$$\ldots \underset{\uparrow}{=} \Big[\underbrace{(x \ln(x) - x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \Big]$$

dank Skript
vor $\int \ln(x)\,dx$
$= [x \ln(x) - x]$

$$- \int \underbrace{(x \ln(x) - x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} \, dx$$

$$= \left[x^2 \ln(x) - x^2 \right]$$

$$- \int x \ln(x)\, dx + \int x \, dx$$

$$= \left[x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 \right] - \int x \ln(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad 2 \int x \ln(x)\, dx = \left[x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 \right]$$

$$\Rightarrow \quad \int x \ln(x)\, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 \right]$$

Also ja, das geht, wird aber komplizierter. Allgemein gilt: der Ansatz "$f'(x) \cdot g(x)$" ist immer ...

... erlaubt, egal wie man die Faktoren einteilt. Manchmal hilft es, manchmal produziert es Schwierigkeiten (siehe 27.05.20-17), manchmal hilft es auch gar nicht.

Schließlich wird

$$\int_2^3 x \ln(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2\right]_2^3$$

$$= \left(\frac{1}{2} 3^2 \ln(3) - \frac{1}{4} 3^2\right)$$

$$- \left(\frac{1}{2} 2^2 \ln(2) - \frac{1}{4} 2^2\right) = \ldots$$

27.05.2019

$$\ldots = \frac{9}{2}\ln(3) - 2\ln(2) - \frac{5}{4}$$

$$\left(= \ln\left(\frac{3^{\frac{9}{2}}}{4}\right) - \frac{5}{4} \right)$$

Umformung ist möglich, aber nicht nötig

<u>Bsp</u> für partielle Integration

$$\int_1^2 \ln(x)^2 \, dx = ?$$

Skript: $\int \ln(x)\,dx$

$$= \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$$

$$= [x \ln(x)] - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= [x\ln(x) - x]$$

Hier: $\int \ln(x)^2 \, dx$

$$= \int \underbrace{\ln(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} \, dx$$

$$= \Big[\underbrace{(x \ln(x) - x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} \Big]$$

$$- \int \underset{f(x)}{(x \ln(x) - x)} \, \underset{g'(x)}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= \Big[x \ln(x)^2 - x \ln(x) \Big]$$

$$- \int \ln(x) - 1 \, dx$$

$$= \Big[x \ln(x)^2 - x \ln(x) \Big]$$

$$- \Big[x \ln(x) - x - x \Big]$$

$$= \Big[x \ln(x)^2 - 2x \ln(x) + 2x \Big]$$

27.05.20-21

Probe: $\frac{d}{dx}\left(x \ln(x)^2 - 2x \ln(x) + 2x\right)$

$= 1 \cdot \ln(x)^2 + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$

$- 2 \cdot 1 \cdot \ln(x) - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + 2$

$= \ln(x)^2$, das paßt

Damit wird schließlich:

$\int_1^2 \ln(x)^2 \, dx$

$= \left[x \ln(x)^2 - 2x \ln(x) + 2x \right]_1^2$

$= \left(2 \ln(2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \ln(2) + 2 \cdot 2\right)$

$- \left(1 \cdot \ln(1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 2 \cdot 1\right)$

$= 2 \ln(2)^2 - 4 \ln(2) + 2$

27.05.20-22

Noch ein alternativer Weg zur

Stammfunktion:

$$\int \ln(x)^2 \, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)^2}_{g(x)} \, dx$$

$$= [\underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)^2}_{g(x)}] - \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}}_{g'(x)} \, dx$$

$$= [x \ln(x)^2] - 2 \int \ln(x) \, dx$$

$$\overset{\text{Skript}}{=} [x \ln(x)^2] - 2 [x \ln(x) - x]$$

$$= [x \ln(x)^2 - 2x \ln(x) + 2x]$$