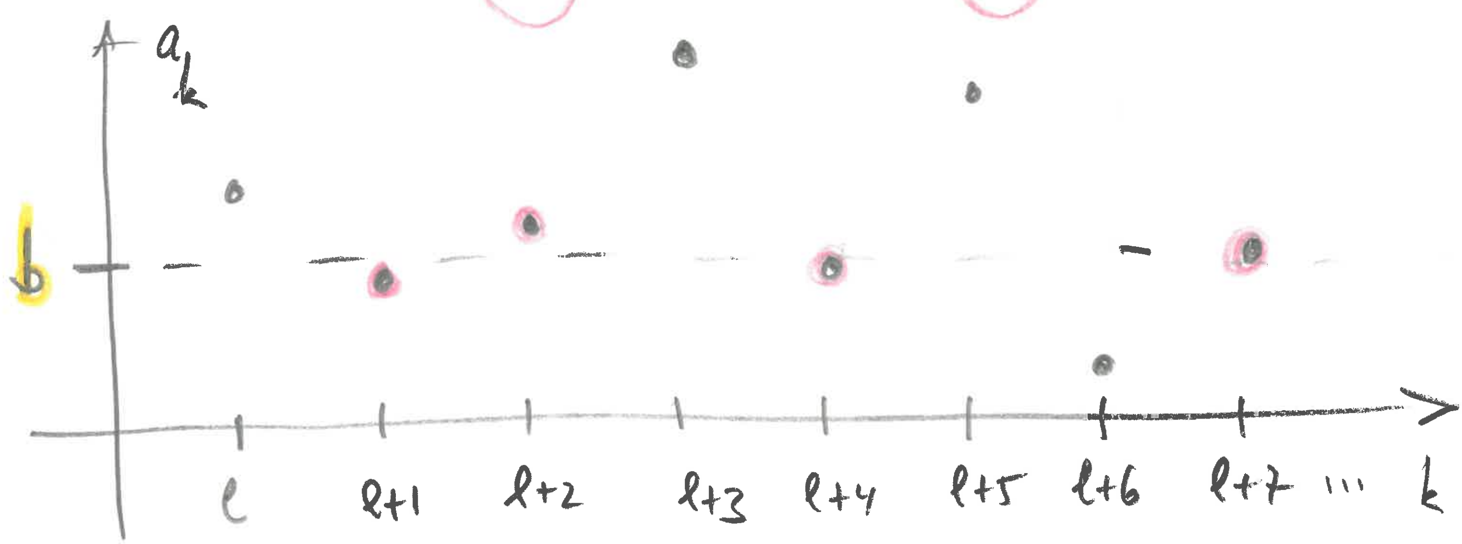
$(a_k)_{k \geq \ell}$: Folge, enthält

$a_\ell, a_{\ell+1}, a_{\ell+2}, \ldots$

Falls $(a_k)_{k \geq \ell}$ keinen Grenzwert hat, brauchen wir Ersatz:

Ein <u>Häufungspunkt</u> b ist ein Grenzwert einer Teilfolge, z.B.:

$$a_\ell, \; \underbrace{a_{\ell+1}}_{= a_{k_1}}, \; \underbrace{a_{\ell+2}}_{= a_{k_2}}, \; a_{\ell+3}, \; \underbrace{a_{\ell+4}}_{= a_{k_3}}, \; a_{\ell+5}, \ldots \qquad \cdot \cdot \cdot$$



29.04.20 – 2

Der Limes superior ist der maximale Häufungspunkt:

$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \max\{ b \in \mathbb{R} : b \text{ ist Häufungspunkt von } (a_k)_{k\geq \ell} \}$$

Bem. Falls $\lim_{k\to\infty} a_k$ existiert,

dann: $\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a_k$.

Bsp $(a_k)_{k\geq 1} = \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{k^2} \right)_{k\geq 1}$

Suchen Teilfolgen, die einen Grenzwert haben.

Einsetzen von

(1) $k = 2n$

$$\Longrightarrow \quad a_{4n} = \sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right) - \frac{1}{(2n)^2}$$

$$= 0 - \frac{1}{(2n)^2} \longrightarrow 0$$

(2) $k = 4n+1$

$$\Longrightarrow \quad a_{4n+1} = \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) - \frac{1}{(4n+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{(4n+1)^2} \longrightarrow 1$$

(3) $k = 4n+3$

$$\Longrightarrow \quad a_{4n+3} = \sin\left(\frac{(4n+3)\pi}{2}\right) - \frac{1}{(4n+3)^2}$$

$$= -1 - \frac{1}{(4n+3)^2} \longrightarrow -1$$

29.04.20
−4

Teilfolgen unter (1), (2), (3) decken alle Folgenglieder ab $\Longrightarrow$ es sind alle Häufungspunkte gefunden, nämlich $0, 1, -1$

Somit:

$$\limsup_{k\to\infty} a_k$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{k^2}$$

$$= \max\{0, 1, -1\} = 1$$