Unendliche Summe,

auch Reihe genannt:

$$\sum_{k=\ell}^{\infty} a_\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\ell}^{n} a_n$$

Reihe kann:

- konvergieren: $\sum_{k=\ell}^{\infty} a_\ell \in \mathbb{R}$
- bestimmt divergieren:
  : $\sum_{k=\ell}^{\infty} a_\ell \in \{-\infty, +\infty\}$
- divergieren: $\sum_{k=\ell}^{\infty} a_\ell$ existiert gar nicht

<u>Bsp</u> $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{5^k}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k \right) - \frac{1}{5^0} - \frac{1}{5^1}$$

Formel = Skript

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{5}{4} - 1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

Diese Reihe konvergiert also.

<u>Bsp</u> $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = +\infty$

Diese Reihe divergiert bestimmt.

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ existiert nicht.

Diese Reihe divergiert.

Denn zu summieren ist:

$$1+0+(-1)+0+1+0+(-1)+\dots$$

$$\underbrace{1}_{1},\quad \underbrace{1+0}_{1},\quad \underbrace{1+0+(-1)}_{0},\quad \underbrace{1+0+(-1)+0}_{0},\quad \underbrace{1+0+(-1)+0+1}_{1},\quad \underbrace{1+0+(-1)+0+1+0}_{1},\quad \underbrace{1+0+(-1)+0+1+0+(-1)}_{0},\quad \dots$$

Folge der Teilsummen hat keinen Grenzwert

29.04.20-8

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$

- Es haben die Summanden abwechselndes Vorzeichen

- Es ist mit $a_k := (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$

auch $|a_k| = \frac{1}{k^2}$

$$\geq$$

$$|a_{k+1}| = \frac{1}{(k+1)^2}$$

- Es ist $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$

$$\xRightarrow[\text{Kriterium}]{\text{Leibniz-}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

konvergiert, d.h.

Grenzwert existiert in $\mathbb{R}$

29.04.2019

Vorsicht:

Wir wissen nun, daß der Grenzwert von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ in $\mathbb{R}$ existiert.

Wir kennen ihn aber nicht.

(Die Bestimmung dieses Grenzwertes ist für uns zu schwierig. Zur Information: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$)