29.04.20
– 10

Bsp $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = ?$

Wir berechnen erstmal die

Teilsumme: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right)$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right)$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{8}}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+ \ldots$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{(n-1)+2}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$= \ldots$

29.04.20 — 11

$$\dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

29.04.20
−12

Es handelt sich um eine Teleskopsumme.

Das hätte man auch noch etwas besser verstecken können:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{2}{k(k+2)}$$

Also: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} \overset{\text{siehe}}{\underset{\text{oben}}{=}} \frac{3}{4}$.