Bsp für Integration komplexwertiger Funktionen

Es ist $\int \frac{1}{(x-i)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x-i} \right]$,

da
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x-i}\right) = \frac{d}{dx}\left(-(x-i)^{-1}\right)$$
$$= -(-1)(x-i)^{-2}$$
$$= \frac{1}{(x-i)^2} \quad \text{ist.}$$

Also alles genauso wie im Reellen.

Ausnahme: Wir kennen den Logarithmus ln nur mit positiven reellen Argumenten:
$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln(x)$$

Folglich können wir

$$\int \frac{1}{x-i}\,dx \quad \text{nicht}$$

berechnen.

Oft kann man diese Berechnung aber umgehen: z.B. wird

$$\int \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\,dx$$

$$= \int \frac{(x+i)-(x-i)}{(x-i)(x+i)}\,dx$$

$$= \int \frac{2i}{x^2+1}\,dx = \left[2i\arctan(x)\right]$$

Hier galt: erst zusammenfassen, dann integrieren.

Bsp für Substitution

Es wird

$$\int x e^{-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x)\, dx$$

$u = -x^2$
$u' = \frac{du}{dx} = -2x$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{u} \cdot \frac{du}{dx}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{u}\, du$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{u}\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]$$

Bsp für unlösbares Integral

(1) Es ist $\int e^{-x^2}\,dx$

mit unseren Mitteln nicht

zu integrieren. Heißt:

- Da e^{-x^2} stetig ist, existiert eine Stammfunktion
- Diese taucht aber nicht im "Katalog" der uns bekannten Funktionen auf.

(2) Auch $\int \frac{1}{\ln(x)}\,dx$ ist

unlösbar für uns.