29.05.20-14

Bsp für lineare Substitution und de Moivre

$$\int \cosh(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int e^{x} \cdot e^{ix} + e^{x} \cdot e^{-ix} + e^{-x} e^{ix} + e^{-x} e^{-ix}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\, dx$$

$$\overset{\text{lineare}}{\underset{\text{Subst.}}{=}} \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i} e^{(1-i)x} + \frac{1}{-1+i} e^{(-1+i)x} + \frac{1}{-1-i} e^{(-1-i)x}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1-i}{2}e^{(1+i)x} + \frac{1+i}{2}e^{(1-i)x} + \frac{-1-i}{2}e^{(-1+i)x} + \frac{-1+i}{2}e^{(-1-i)x}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{x}\left((1-i)e^{ix} + (1+i)e^{-ix}\right) + e^{-x}\left((-1-i)e^{ix} + (-1+i)e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{x}\left(\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) - i\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right) + e^{-x}\left(-\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) - i\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{x}\left(2\cos(x) \underbrace{-i\cdot 2i}_{+2}\sin(x)\right) + e^{-x}\left(-2\cos(x) \underbrace{-i\,2i}_{+2}\sin(x)\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sinh(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\cosh(x)\sin(x)\right]$$

Bsp für Partialbruchzerlegung
(nur Zerlegung, noch ohne Integral)

Wir wollen die Partialbruchzerlegung

von $$\frac{x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 (x-1)^3}$$

bestimmen.

Ansatz:

$$\frac{x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 (x-1)^3}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

Gesucht: A, B, C, D, E

29.05.20 – 12

Multiplikation mit $x^2(x-1)^3$:

$$x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1$$

$$\overset{!}{=} A\,x(x-1)^3 + B(x-1)^3$$

$$+ C\cdot x^2(x-1)^2 + D x^2(x-1) + E x^2$$

ausmultiplizieren

$$= A(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x)$$

$$+ B(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$+ C(x^4 - 2x^3 + x^2)$$

$$+ D(x^3 - x^2)$$

$$+ E x^2$$

29.05.2018

Das gibt das LGS:

	A	B	C	D	E	
x^4:	$\boxed{1}$	0	1	0	0	1
x^3:	-3	1	-2	1	0	-1
x^2:	3	-3	1	-1	1	1
x^1:	-1	3	0	0	0	2
x^0:	0	-1	0	0	0	-1

z.B. steht hier der Koeffizientenvergleich bei x^2

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{+1} & 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad A = 1, \; B = 1, \; C = 0, \; D = 1, \; E = 2$

29.05.2019

Wir haben so die folgende Partialbruchzerlegung erhalten:

$$\frac{x^4-x^3+x^2+2x-1}{x^2(x-1)^3}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

Bsp für Partialbruchzerlegung

(nur Zerlegung, noch ohne Integral)

Wir wollen die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^3-1}$ bestimmen.

Zunächst ist $x^3-1 = \ldots$

21.05.2020

$$\ldots = (x-1)\,(x^2+x+1)$$

$$= (x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

Ansatz:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)^1\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{A}{(x-1)^1} + \frac{B}{\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^1} + \frac{C}{\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^1}$$

Gesucht: $A, B, C \in \mathbb{C}$

Multiplizieren mit x^3-1:

$$1 = A(x^2+x+1)$$
$$+ B(x-1)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$+ C(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \ldots$$

$$
\begin{aligned}
\ldots = \; & A\,(x^2+x+1) \\
& + B\left(x^2+\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)x+\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right) \\
& + C\left(x^2+\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)x+\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem

$$
\begin{array}{c}
 \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0:
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad A \quad & \qquad B \qquad & \qquad C \qquad \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3} & 0 \\
1 & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3} & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3} & 0 \\
2 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} & 2
\end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +1 \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\
2 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3} & 0 \\
4 & -2 & -2 & 2
\end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +1 \\ +2 \end{array} \rightsquigarrow \ldots
$$

29.05.20-22

$$\cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2i\sqrt{3} & -1-\frac{i\sqrt{3}}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6} \\ C = \frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3-1} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6}}{x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}} + \frac{\frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6}}{x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}}$$

ist die gesuchte Partialbruchzerlegung