Künzer, Nitsche, Ritter **Abgabe bis Dienstag 28.07.2020**

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Summe
Punkte	/3	/2	/3	/3	/5	/3	/5	/6	/ 30

Mathematik 2 für Informatiker

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Falls in der Aufgabe Herleitungen verlangt sind, sind diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Folge $(a_k)_{k\geqslant 1} := \left(\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})k+7}{4k}\right)_{k\geqslant 1}$.

Bestimmen Sie den Limes superior: $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k \quad = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x-2+\ln(x)+\cos(\frac{\pi}{2}x)} \quad = \boxed{}$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \smallsetminus \{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{7}{(3x-2)^2}$ gegeben. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.

Bestimmen Sie: $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty)) \quad = \boxed{} \subseteq \mathbb{R} \smallsetminus \{\frac{2}{3}\}$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $(6-4\mathrm{i})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\mathrm{i})^k}{3^{k+1}} = \boxed{}$

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+2\mathrm{i})^k}{3^{k+1}}$? $\boxed{}$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(\pi x)} - 3$. Bestimmen Sie:

$f'(x) = \boxed{}$ $\quad f''(x) = \boxed{}$

Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ an.

$$\mathrm{T}_2(f,x,3) = \boxed{} + \boxed{}(x-3) + \boxed{}(x-3)^2$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-4x^2+4x-4}{(x^2+1)^2x} =$$

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Wir betrachten auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ die Differentialgleichung

$$y' \;=\; 1 + 3\,\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \;.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$. Geben Sie dazu auch den Lösungsweg an.

(b) Bestätigen Sie mit einer Probe: Die in (a) bestimmte Funktion $y(x)$ auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$.
Führen Sie die dazu nötigen Rechnungen an.

Aufgabe 6 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/3}} x \sin(3x^2 + \pi)\,\mathrm{d}x \quad =$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad =$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^4}\,\mathrm{d}x \quad =$

Aufgabe 7 (5 Punkte) Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x(y^2 + z^2) - 3x^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + \frac{1}{2}(y + z)^2 - 9$.

(a) Bestimmen Sie:

$\nabla_f(x, y, z) =$ $\qquad$ $\mathrm{H}_f(x, y, z) =$

$\nabla_g(x, y, z) =$ $\qquad$ $\mathrm{H}_g(x, y, z) =$

(b) Es ist $(3, 0, 0)$ eine Flachstelle unter Nebenbedingung $g = 0$. Handelt es sich bei $(3, 0, 0)$ um eine Sattelstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$? Geben Sie dazu auch den Lösungsweg an.

Aufgabe 8 (6 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, deren Inverse S^{-1}, und eine Matrix J in Jordanscher Normalform so, dass $J = S^{-1}AS$ ist.

$S \;=$ $\qquad$ $S^{-1} \;=$ $\qquad$ $J \;=$

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie: $\exp(Ax)^{-1} \;=$

(d) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + \mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}$.

$y(x) \;=$