Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Summe
Punkte	/3	/2	/3	/3	/5	/3	/5	/6	/ 30

Mathematik 2 für Informatiker

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Falls in der Aufgabe Herleitungen verlangt sind, sind diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Folge $(a_k)_{k\geqslant 1} := \left(\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})k+7}{4k}\right)_{k\geqslant 1}$.

Bestimmen Sie den Limes superior: $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k \;=\; \boxed{\frac{1}{4}}$

(b) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x-2+\ln(x)+\cos(\frac{\pi}{2}x)} \;=\; \boxed{\frac{4}{6-\pi}}$

(c) Sei $f : \mathbb{R}\smallsetminus\{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{7}{(3x-2)^2}$ gegeben. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.

Bestimmen Sie: $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty)) \;=\; \boxed{\mathrm{U}_{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}}}(\tfrac{2}{3}) \smallsetminus \{\tfrac{2}{3}\}} \;\subseteq\; \mathbb{R}\smallsetminus\{\frac{2}{3}\}$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $(6-4\mathrm{i})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\mathrm{i})^k}{3^{k+1}} = \boxed{2}$

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+2\mathrm{i})^k}{3^{k+1}}$? $\boxed{-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}}$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(\pi x)} - 3$. Bestimmen Sie:

$f'(x) = \boxed{\pi\cos(\pi x)\mathrm{e}^{\sin(\pi x)}}$ $f''(x) = \boxed{\pi^2(\cos(\pi x)^2 - \sin(\pi x))\mathrm{e}^{\sin(\pi x)}}$

Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ an.

$$\mathrm{T}_2(f,x,3) = \boxed{-2} + \boxed{(-\pi)}(x-3) + \boxed{\frac{\pi^2}{2}}(x-3)^2$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-4x^2+4x-4}{(x^2+1)^2 x} =$$

$$\boxed{\frac{2-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}} + \boxed{\frac{-1}{(x-\mathrm{i})^2}} + \boxed{\frac{2+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}} + \boxed{\frac{-1}{(x+\mathrm{i})^2}} + \boxed{\frac{-4}{x}}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Wir betrachten auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ die Differentialgleichung

$$y' \;=\; 1 + 3\,\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \,.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$. Geben Sie dazu auch den Lösungsweg an.

Es liegt eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung vor. Wir substituieren $u = \frac{y}{x}$, also $y = ux$, also $y' = u'x + u$. Die substituierte Differentialgleichung in u ist $u'x + u = 1 + 3u + u^2$, also $u'x = 1 + 2u + u^2 = (u+1)^2$, also

$$u' \;=\; x^{-1}(u+1)^2 \,.$$

Dies ist eine separierbare Differentialgleichung: $\frac{u'}{(u+1)^2} = \frac{1}{x}$. Wir integrieren auf der linken Seite zu $\int \frac{u'}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = [-(u+1)^{-1}]$. Wir integrieren auf der rechten Seite zu $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x|)] = [\ln(x)]$, unter Beachtung von $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Also $[-(u+1)^{-1}] = [\ln(x)]$. Also $-(u+1)^{-1} = \ln(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wir lösen nach u auf: Es wird $-(u+1) = \frac{1}{\ln(x)+c}$, und dann $u = -1 - \frac{1}{\ln(x)+c}$.

Wir substituieren zurück: Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$y \;=\; y(x) \;=\; ux \;=\; \left(-1 - \frac{1}{\ln(x) + c}\right) x$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Manche dieser Lösungen haben dabei noch eine Definitionslücke in $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$.
Wir sollten $c \in \mathbb{R}$ wählen mit

$$-2 \;\stackrel{!}{=}\; y(1) \;=\; \left(-1 - \frac{1}{\ln(1) + c}\right) \cdot 1 \;=\; -1 - \frac{1}{c} \,.$$

Dies führt auf $c = 1$ und auf die Lösung

$$y \;=\; y(x) \;=\; \left(-1 - \frac{1}{\ln(x) + 1}\right) x$$

der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$.
Wegen $\ln(x) > \ln(\frac{1}{2}) > \ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1$ für $x > \frac{1}{2}$ ist der Nenner $\ln(x) + 1$ in der Tat auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ ungleich 0.

(b) Bestätigen Sie mit einer Probe: Die in (a) bestimmte Funktion $y(x)$ auf $\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$.
Führen Sie die dazu nötigen Rechnungen an.

Zum einen wird

$$\begin{aligned} y' &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-1 - \tfrac{1}{\ln(x)+1}\right)x \\ &= \left(-1 - \tfrac{1}{\ln(x)+1}\right) - \tfrac{-x^{-1}}{(\ln(x)+1)^2}\cdot x \\ &= -1 - \tfrac{1}{\ln(x)+1} + \tfrac{1}{(\ln(x)+1)^2}\ . \end{aligned}$$

Zum anderen wird

$$\begin{aligned} 1 + 3\,\tfrac{y}{x} + \left(\tfrac{y}{x}\right)^2 &= 1 + 3\left(-1 - \tfrac{1}{\ln(x)+1}\right) + \left(-1 - \tfrac{1}{\ln(x)+1}\right)^2 \\ &= 1 - 3 - \tfrac{3}{\ln(x)+1} + 1 + \tfrac{2}{\ln(x)+1} + \tfrac{1}{(\ln(x)+1)^2} \\ &= -1 - \tfrac{1}{\ln(x)+1} + \tfrac{1}{(\ln(x)+1)^2}\ . \end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

Schließlich wird $y(1) = \left(-1 - \tfrac{1}{\ln(1)+1}\right)\cdot 1 = -2.$

Aufgabe 6 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/3}} x\sin(3x^2+\pi)\,\mathrm{d}x \quad = \quad -\frac{1}{3}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad = \quad [\tfrac{1}{2}\ln(x)^2]$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^4}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{9}$

Aufgabe 7 (5 Punkte) Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x(y^2 + z^2) - 3x^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + \frac{1}{2}(y + z)^2 - 9$.

(a) Bestimmen Sie:

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2+z^2-6x \\ 2xy \\ 2xz \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -6 & 2y & 2z \\ 2y & 2x & 0 \\ 2z & 0 & 2x \end{pmatrix}$$

$$\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ y+z \\ y+z \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Es ist $(3, 0, 0)$ eine Flachstelle unter Nebenbedingung $g = 0$. Handelt es sich bei $(3, 0, 0)$ um eine Sattelstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$? Geben Sie dazu auch den Lösungsweg an.

Für die Flachstelle $(3, 0, 0)$ erhalten wir $\lambda_1 = -3$ aus der Gleichung
$\nabla_f(3,0,0) = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \nabla_g(3,0,0)$.
Weiter ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;:\; \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} u = 0 \,\}$.

Wir setzen daher $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir setzen außerdem
$H := \mathrm{H}_f(3,0,0) - (-3) \cdot \mathrm{H}_g(3,0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
und erhalten $U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U) = 9$ und $\mathrm{M}_2(U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U) = 72$.

Also ist die Matrix $U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U$ positiv definit.

Somit ist $(3, 0, 0)$ eine lokale Minimalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 8 (6 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, deren Inverse S^{-1}, und eine Matrix J in Jordanscher Normalform so, dass $J = S^{-1}AS$ ist.

$$S = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad S^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \qquad J = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ auf $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\left(e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3x}\begin{pmatrix} -x \\ 1 \\ -x \end{pmatrix}, e^{3x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

(c) Bestimmen Sie: $\exp(Ax)^{-1} = \boxed{e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}}$

(d) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}$.

$$y(x) = \boxed{\frac{e^{3x}}{6}\begin{pmatrix} 6x-x^3 \\ 3x^2 \\ 6x-x^3 \end{pmatrix}}$$