Aufgabe 5 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) =$ $\boxed{\ln(2)}$

(b) Bestimmen Sie: $\limsup_{k\to\infty} \cos(\pi \cdot k) + 2 =$ $\boxed{3}$

Für welche $x \in \mathbb{R}_{>0}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\cos(\pi \cdot k)+2)^k}{x^k}$? $\boxed{x \in \mathbb{R}_{>3}}$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(x^2-4)}$. Bestimmen Sie:

$f'(x) =$ $\boxed{2\pi \mathrm{i} x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(x^2-4)}}$ $f''(x) =$ $\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(x^2-4)}(\pi \mathrm{i} - 2\pi^2 x^2)}$

Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

$$\mathrm{T}_2(f, x, 1) = \boxed{-1} + \boxed{(-2\pi \mathrm{i})}\,(x-1) + \boxed{2\pi^2 - \pi \mathrm{i}}\,(x-1)^2$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2 + \pi)\,\mathrm{d}x =$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$

(b) $\int \mathrm{e}^{-2x} x \,\mathrm{d}x =$ $\boxed{\left[-\frac{1}{2} x \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right]}$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{x^3}\,\mathrm{d}x =$ $\boxed{\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4}}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/4	/4	/3	/9	/3	/4	/3	/ 30

Mathematik 2 für msv

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 7n + 4}{1 - 2n + 3n^2 - 7n^3} =$ $\boxed{-\frac{1}{7}}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x^2+5}\right) =$ $\boxed{-\infty}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2} =$ $\boxed{\frac{9}{2}}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n} - \sqrt{n+3}) =$ $\boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der folgenden Partialbruchzerlegung.

$$\frac{2x+2}{x^2(x^2+1)} = \frac{\boxed{2}}{x} + \frac{\boxed{2}}{x^2} + \frac{\boxed{-1-\mathrm{i}}}{x+\mathrm{i}} + \frac{\boxed{-1+\mathrm{i}}}{x-\mathrm{i}}$$

(b) Berechnen Sie: $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[2\ln(|x|) - \frac{2}{x} - \ln(x^2+1) - 2\arctan(x)\right]}$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Gegeben sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i})^k}{3^{k+1}}(z-\mathrm{i})^k$.

(a) Bestimmen Sie Entwicklungspunkt: $z_0 = \boxed{\mathrm{i}}$ und Konvergenzradius: $\rho = \boxed{\frac{3}{2}}$

(b) Konvergiert die Potenzreihe in $z = 2\mathrm{i}$? Begründen Sie ihre Antwort.

Ja, denn $2\mathrm{i}$ liegt wegen $|2\mathrm{i} - z_0| = |\mathrm{i}| = 1 < \frac{3}{2}$ in der Konvergenzkreisscheibe $\mathrm{U}_\rho^{\mathbb{C}}(z_0)$.

(c) Konvergiert die Potenzreihe in $z = -\frac{\mathrm{i}}{2}$? Begründen Sie ihre Antwort.

Nein. Für $z = -\frac{\mathrm{i}}{2}$ und $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist $\left|\frac{(2\mathrm{i})^k}{3^{k+1}}(z-\mathrm{i})^k\right| = \left|\frac{(2\mathrm{i})^k}{3^{k+1}}\left(-\frac{3\mathrm{i}}{2}\right)^k\right| = \frac{2^k}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{2^k} = \frac{1}{3}$.

Also ist die Folge der Summanden keine Nullfolge. Somit konvergiert die Reihe nicht.

Aufgabe 4 (9 Punkte) Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 4xyz + \frac{1}{3}x^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 + (y+z)^2 - 8$.

(a) Bestimmen Sie:

$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4yz+x^2 \\ 4xz \\ 4xy \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y+z) \\ 2(y+z) \end{pmatrix}$

(b) Sei F die Menge der Flachstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.
Bestimmen Sie die Menge $\{\,(x,y,z) \in F \;:\; z = 0\,\}$:

$$\{(2\sqrt{2},0,0),\ (-2\sqrt{2},0,0),\ (0,2\sqrt{2},0),\ (0,-2\sqrt{2},0)\}$$

(c) Es ist $(2,1,1)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ mit $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \nabla_f(2,1,1) = 2 \cdot \nabla_g(2,1,1) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Matrix U, in deren Spalten eine Basis von $\{\,u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;:\; (4\;4\;4)\,u = 0\,\}$ steht:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Hessematrix von f:

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4z & 4y \\ 4z & 0 & 4x \\ 4y & 4x & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $H := \mathrm{H}_f(2,1,1) - 2 \cdot \mathrm{H}_g(2,1,1)$. Bestimmen Sie:

$H = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$

Handelt es sich bei $(2,1,1)$ um eine Sattelstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$?

Es ist eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.
