

Blatt 14

Platzaufgaben

Platzaufgabe 47 Skizzieren Sie folgende Teilmengen der Zahlengeraden \mathbb{R} .

- (a) $A := U_{\frac{1}{2}}(0)$
- (b) $B := U_{\frac{1}{4}}(-\infty)$
- (c) $C := A \cap B$
- (d) $D := U_{\frac{1}{3}}(+\infty) \setminus A$

Platzaufgabe 48 Sei $f :]3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{2}{(x-3)^2}$ gegeben.

- (a) Skizzieren Sie den Graphen von f .
- (b) Bestimmen Sie $f^{-1}(U_\varepsilon(0))$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (c) Zeigen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ unter Verwendung von ε und δ .

Platzaufgabe 49 Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} . \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen von f .
- (b) Begründen Sie die Unstetigkeit von f an der Stelle $x_0 = 0$ unter Verwendung von ε und δ .

Platzaufgabe 50 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{7n^2 - 3n + 12}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-2x^2 + \sin(x)}$

Blatt 14

Hausaufgaben

Hausaufgabe 53 Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{2}{(x-3)^2}$ gegeben.

- Skizzieren Sie den Graphen von f .
- Bestimmen Sie $f^{-1}(U_\varepsilon(+\infty))$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
- Zeigen Sie $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ unter Verwendung von ε und δ .

Hausaufgabe 54

Konstruieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften (1, 2, 3).

- Es ist f nicht stetig an der Stelle $x_0 = 1$, aber stetig an allen anderen Stellen.
Die Unstetigkeit an der Stelle $x_0 = 1$ soll hierbei mittels ε und δ begründet werden.
- Es ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.
- Es ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Skizzieren Sie den Graphen von f .

Hinweis: Zur Definition von f darf eine Fallunterscheidung verwendet werden, um sich eine bereichsweise Definition zu ermöglichen.

Hausaufgabe 55

Gegeben seien Parameter $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir betrachten die Folge

$$(f_n)_{n \geq 0} := \left(\sqrt{an}(\sqrt{n} - \sqrt{n+b}) \right)_{n \geq 0}.$$

- Bestimmen Sie $\Phi_{a,b} := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- Skizzieren Sie die Menge $\{(a, b) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} : \Phi_{a,b} \in U_{\frac{1}{2}}(0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Hausaufgabe 56 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 17n - 12}{4n^2 - 3n + 2}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{11n^2 + 17n - 12}{-3n + 12 + 7n^2}}$$

Markieren Sie dabei in Ihrer Rechnung die Stelle, an welcher Sie die Stetigkeit der Wurzelfunktion benötigen.

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + 3x^2 + 2x}{\frac{1}{2}x^2 - x + 2 \cos(x)}$$