

Blatt 16

Platzaufgaben

Platzaufgabe 55 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(5 + (-1)^k)^k}{7^k}$$

(c)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5 + 12k^2}$$

(d)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5 + 12k}$$

Platzaufgabe 56 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

Bestimmen Sie $f'(1)$ unter direkter Verwendung der Definition der Ableitung.

Platzaufgabe 57 Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen.

(a)
$$\frac{d}{dx} x^2 \cos(x)$$

(b)
$$\frac{d}{dx} \frac{x^2 + 1}{\sin(x)}$$

(c)
$$\frac{d}{dx} \cos(2x^2 - 3)$$

(d)
$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{\tan(x)}{x^2 + 2x + 1}$$

Platzaufgabe 58 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Grenzwertregel nach l'Hôpital.

(a)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x - 2}$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(5x)}$$

(c)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin(1/x^2)$$

Blatt 16

Hausaufgaben

Hausaufgabe 61

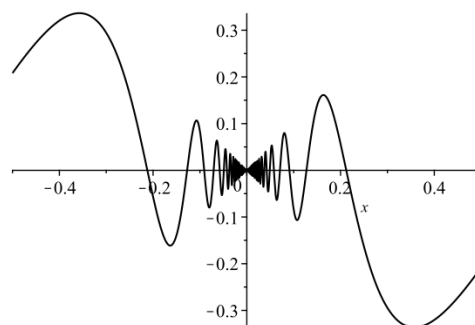
(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$ für $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent ist.

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s + (-1)^k)^k}{7^k}$?

Hausaufgabe 62 Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x \cos(1/x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ihr Graph ist rechts abgebildet.



(a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto g(h) := \cos(1/h)$.

Bestimmen Sie die Folggrenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\frac{1}{2n\pi})$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\frac{1}{(2n+1)\pi})$.

Untersuchen Sie, ob $\lim_{h \rightarrow 0} g(h)$ existiert.

Hinweis: Hierzu wurde die zweite Bemerkung in §4.3 ergänzt.

(c) Ist f in 0 differenzierbar? Untersuchen Sie dies direkt mit der Definition der Ableitung.

Hausaufgabe 63 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ gegeben.

Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ und die zweite Ableitung $f''(x)$.

(a) $f(x) = \frac{1}{1 + 2x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$

Hausaufgabe 64 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2 + 3x)}{2x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin(x) - x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x + 3}$