Mathematik 2 für inf, swt, msv

Blatt 17

Platzaufgaben

Platzaufgabe 59 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto x \cdot \cos(\pi x)$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ und $f^{(3)}(x)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f, x, 2)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{R}_2(f, x, 2, \vartheta)$, wobei $\vartheta \in [0, 1]$.

(d) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| \leqslant C \cdot |x - 2|^3$ für $x \in [1, 3]$.

Platzaufgabe 60 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$.

(a) Bestätigen Sie mit Induktion: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2x + 1)^{-(n+1)}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

(b) Berechnen Sie die Taylorpolynome $\mathrm{T}_1(f, x, -1)$ und $\mathrm{T}_2(f, x, -1)$.

Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$, $\mathrm{T}_1(f, x, -1)$ und $\mathrm{T}_2(f, x, -1)$ in eine gemeinsame Zeichnung.

(c) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, -1)$.

Konvergiert diese für $x = -2$? Ist -2 im Definitionsbereich von f ?

Konvergiert diese für $x = -\frac{3}{4}$? Falls ja, vergleichen Sie ihren Grenzwert mit dem Funktionswert $f(-\frac{3}{4})$.

Platzaufgabe 61 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto x^3$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_\infty(f, x, 1)$.

Bestätigen Sie durch direkte Rechnung, dass $\mathrm{T}_\infty(f, x, 1) = f(x)$ ist für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}$. Bestimmen Sie $\mathrm{R}_n(f, x, 1, \vartheta)$, wobei $\vartheta \in [0, 1]$.

Begründen Sie mit dem Korollar von Taylor, dass $\mathrm{T}_\infty(f, x, 1) = f(x)$ ist für $x \in \mathbb{R}$.

Platzaufgabe 62

(a) Bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{x+\mathrm{i}}$. Bestimmen Sie $f'(x)$.

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Blatt 17

Hausaufgaben

Hausaufgabe 65 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C} \,:\, x \mapsto (\mathrm{i} + \sqrt{x})^3$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_4(f, x, 1)$.

Hausaufgabe 66 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \sin(x^2)$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f, x, 2)$.

(c) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| \leqslant C \cdot |x - 2|^3$$

für $x \in [1, 3]$.

Hausaufgabe 67 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ unter Verwendung einer Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, 0)$.

(c) Verifizieren Sie unter Verwendung des Restglieds, dass $f(\frac{1}{2}) = \mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{2}, 0)$ ist.
Hierbei darf $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} = 0$ verwendet werden.

Hausaufgabe 68 Von der 5-fach stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass sie das Taylorpolynom der Stufe 4

$$\mathrm{T}_4(f, x, 4) = 3 + 5(x-4)^2 - 5(x-4)^3$$

hat. Ferner sei bekannt, dass $|f^{(5)}(x)| \leqslant 12$ ist für $x \in [3, 5]$.

(a) Bestimmen Sie $f(4)$ und $f^{(3)}(4)$.

(b) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit

$$\mathrm{T}_4(g, x, 4) = \mathrm{T}_4(h, x, 4) = \mathrm{T}_4(f, x, 4).$$

(c) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f(5) \in [a, b]$ ist.